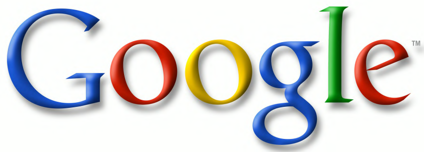


GRUNDZÜGE

EINER

ALLGEMEINEN THEORIE

DER

OBERFLÄCHEN

IN

SYNTHETISCHER BEHANDLUNG.

VON

DR. LUDWIG CREMONA,
PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER KÖNIGL. POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU MAILAND.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

MAXIMILIAN CURTZE,
ORDENTLICHEM LEHRER AM GYMNASIUM ZU THORN.

AUTORISIERTE AUSGABE.

BERLIN 1870.
S. CALVARY & COMP.
OBERWASSER-STRASSE 11.

HERRN GEHEIMEN-REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR

DR. JOHANN AUGUST GRUNERT

IN

GREIFSWALD,

SEINEM VEREHRTEN LEHRER

GEWIDMET

VOM

ÜBERSETZER.

Hochverehrtester Herr Professor!

Als Sie mir vor fast drei Jahren als Geschenk des Herrn Verfassers die erste Abtheilung des Werkes übersandten, das ich in deutschem Gewande Ihnen darzubringen mir erlaube, sprachen Sie in der begleitenden Zuschrift gegen mich den Wunsch einer Uebersetzung aus, den ich hierdurch verwirklicht habe. Ihr Rath kam meiner Neigung entgegen, der Herr Verfasser gab mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit seine Einwilligung zur Uebersetzung und verschaffte mir auch die Zustimmung der Accademia delle Scienze dell Istituto di Bologna zu diesem Unternehmen, in deren *Memorie* (II^a Serie, T. 6^0, p. 91—136; T. 7^0, p. 19—78) das italiänische Original zunächst erschienen ist. Der Titel desselben lautet in der Separatausgabe »PRELIMINARI DI UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE SUPERFICIE. DI LUIGI CREMONA Professore presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Si vende presso il Tipografo Francesco Zanetti Milano, via del Senato, 26.« Dasselbe bildet die Fortsetzung zu dem früher erschienenen Werke desselben Verfassers »INTRODUZIONE AD UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE CURVE PIANE. PEL Dr. LUIGI CREMONA, Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna. BOLOGNA, TIPI GAMBERINI E PARMEGGIANI. 1862.« Jener gelehrten Körperschaft und dem Herrn Verfasser erlaube ich mir bei dieser Gelegenheit für ihre gütige Erlaubniss meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Mein verehrter Freund, Herr Professor Cremona, ging aber noch weiter. Er hat dem Original eine grössere Zahl hand-

schriftlicher Zusätze beigefügt, die im Vereine mit dem dritten Theile, der ebenfalls im Originale nicht vorhanden ist, der Uebersetzung in Bezug auf Vollständigkeit der Untersuchungen wohl einigen Vorzug vor jenem geben, wenn es auch unmöglich sein dürfte, in der Uebertragung den glänzenden, gefälligen Stil des Originals zu erreichen.

Das letzte Capitel des zweiten Theiles und der ganze dritte Theil sind die Uebersetzung der Capitel IV—XI der grossen Abhandlung des Herrn Verfassers über die Flächen dritter Ordnung, welcher 1866 die Hälfte des Steinerschen Preises durch die Berliner Akademie zuerkannt wurde[1]), und die in den ersten beiden Heften des 68. Bandes des »*Journals für die reine und angewandte Mathematik*« unter dem Titel erschienen ist: **Mémoire de Géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre.** (Par L. Cremona à Milan).« Die ersten drei Capitel dieser Abhandlung kann man als einen kurzen, nur das für die cubischen Flächen Nöthige zusammenfassenden Auszug aus dem italiänischen Werke ansehen.

Dass mir vergönnt war, diese wichtige Abhandlung meiner Uebersetzung einverleiben zu dürfen, verdanke ich zunächst dem Herrn Verfasser, der mir die Erlaubniss zu dieser Arbeit von dem Herausgeber des *Crelle-Borchardtschen Journals* Herrn Professor Borchardt und dem Verleger desselben, Herrn Buchhändler Reimer in *Berlin* erwirkte. Beide Herren haben dazu ihre freund-

[1]) Die andern Hälfte wurde Herrn Dr. Rudolf Sturm zuerkannt, dessen Werk, höchst instructiv und reich an Resultaten, unter dem Titel veröffentlicht ist: *Syntetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig 1867.

liche Einwilligung bereitwilligst ertheilt, wofür ich ihnen hierdurch meinen verbindlichsten Dank auszusprechen nicht unterlassen kann.

Um Ihnen einen schnellen Ueberblick über den Umfang der Zusätze zu geben, durch welche die deutsche Ausgabe gegen das italiänische Original erweitert ist, erlaube ich mir hier eine Gegenüberstellung der Nummern oder Paragraphen des Originals und der Uebersetzung folgen zu lassen.

Original:		Uebersetzung:
No. 1—44	=	No. 1—44
———	. . . .	No. 45—47 (Neu).
No. 45—57	=	No. 48—60.
No. 61 [1])—76	=	No. 61—76.
———	. . . .	No. 77—82 (Neu).
No. 77—90	=	No. 83—96.
———	. . . .	No. 97—112 (Neu).
No. 91—95	=	No. 113—117.
———	. . . .	No. 118—119 (Neu).
No. 96—116	=	No. 120—140
———	. . . .	No. 141 (Neu).
No. 117	=	No. 142.
———	. . . .	No. 143 (Neu).
No. 118—131	=	No. 144—157.
———	. . . .	No. 158—289 (Neu).

Herr Professor Cremona hat die weitere Freundlichkeit gehabt, auf meine Bitte die Probeabzüge einer genauen Correctur zu unter-

1) Die Nummern 58—60 fehlen im Originale.

ziehen, damit dadurch etwaige Missverständnisse meinerseits vermieden würden. Welcher Dienst der Uebersetzung dadurch geleistet ist, kann nur ich hinreichend würdigen.

Was die Uebersetzung selbst anbetrifft, so habe ich mich streng an das Original gehalten, ich habe nur mit Billigung des Herrn Verfassers die Bezeichnung durch das ganze Werk in der Art einheitlich gemacht, dass ich Puncte durch kleine deutsche Buchstaben, Curven durch dergleichen lateinische, Flächen durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnete. Zahlenwerthe, also auch die Zahlen für die Singularitäten der Curven und Flächen, sind durch griechische Typen gegeben, Abkürzungssymbole, wie Summenzeichen u. dgl., durch grosse deutsche Buchstaben.

Da in der Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung die Litteraturnachweisungen nur spärlich unter dem Texte gegeben, dagegen die benutzten Schriften in der Einleitung zusammengestellt sind, so glaube ich im Sinne des Herrn Verfassers zu handeln, wenn ich diesen Quellennachweis Ihnen hier ebenfalls vorlege.

Ausser der Abhandlung Steiners, die den Gegenstand der Preisfrage bildete (*Ueber die Flächen dritten Grades*, 1856) und den Werken und Memoirs allgemeinen Inhalts von Chasles, Hesse, Jonquières und Anderen, sind speciell folgende Abhandlungen über die Theorie der cubischen Flächen benutzt worden:

August, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissertatio inauguralis. Berolini 1862);

Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Annali di scienze matematiche e fisiche, Roma 1855);

Cayley, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, T. 4. 1849);

Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Crelles Journal, Bd. 58, 1860);

Clebsch, *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen* (Ebendaselbst);

Clebsch, *Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Crell. Journ., Bd. 59, 1861);

Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Crelles Journal, Bd. 63, 1863);

Grassmann, *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen* (Crelles Journal, Bd. 49, 1854);

Hesse, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung* (Crelles Journal, Bd. 49, 1854);

Salmon, *On the triple tangent planes to a surface of the third order* (Cambridge and Dublin mathematical Journal. T. 4, 1849);

Salmon, *On quaternary cubics* (Philosophical Transactions, 1860);

Salmon, *Analytic geometry of three dimensions* (2d. ed. Dublin 1865);

Schiaparelli, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Memorie dell' Accademia di Torino, 1862);

Schläfli, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon*

a surface of the third order etc. (Quarterly Journal of Mathemetics, T. 2, 1858);

Schläfli, *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosophical Transactions, 1863);

Schröter, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung* (Crelles Journal, Bd. 62, 1863);

Sylvester, *On elimination, transformation and canonical forms* (Cambridge and Dublin math. Journal, T. 6. 1851).

Damit übergebe ich denn Ihnen und dem Publicum auch dieses treffliche Werk meines verehrten Freundes in deutscher Uebertragung und wünsche nur, dass es auch in dieser neuen Gestalt bei Ihnen und anderwärts eine gleich wohlwollende Aufnahme finden möge, wie sie meiner Uebersetzung der *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* zu Theil geworden ist.

Thorn den 1. September 1869.

M. Curtze.

VORREDE DES VERFASSERS.

„Nisi utile est, quod facimus, stulta est gloria."
PHAEDRI *Fabulae, III.* 17.

Die wohlwollende Aufnahme, die meine *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [1]) bei dieser Akademie und den Geometriebeflissenen gefunden, haben mich angespornt, dasselbe Unternehmen für die Geometrie des Raumes mit drei Dimensionen zu versuchen. Hier ist natürlich der Stoff um Vieles zusammengesetzter, und das Feld ohne Vergleich viel weiter; es ist mir daher Bedürfniss, des Lesers Verzeihung für die Lücken und Versehen mir zu erbitten, denen er nur zu häufig, nicht nur bei Unbedeutendem, sondern auch bei schwer Wiegendem begegnen wird.

Der Hauptzweck dieser Arbeit besteht darin, mit synthetischer Methode die wichtigsten Sätze der höhern Geometrie zu beweisen, die der Theorie der Oberflächen beliebiger Ordnung angehören, und die man in den Werken und Abhandlungen von SALMON, CHASLES, STEINER, CLEBSCH, ... analytisch bewiesen, oder wenig-

---

[1]) Memorie dell' Accademia di Bologna, T. 12. (Prima Serie) 1862. Fortsetzung der *Introduzione* bilden einige kurze Abhandlungen, die in den *Annali di Matematica,* welche Professor TORTOLINI in *Rom* herausgegeben, veröffentlicht sind, nämlich: *Sulla teoria delle coniche* (T. 5, p. 330); *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (T. 6, p. 153); *Sulla teoria delle coniche* (T. 6., p. 179). Von der *Introduzione* und diesen *Zusätzen* ist von dem Uebersetzer vorliegenden Werkes gleichfalls eine deutsche Ausgabe erschienen (*Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*, Greifswald 1865).

stens ausgesprochen findet [1]), und dieselben mit den Resultaten meiner eigenen Untersuchungen theils zu verknüpfen, theils durch dieselben zu vervollständigen. Um aber der Schrift eine geziemende Gestalt zu geben, und um auch Jünglingen den Zugang zu ihr möglich zu machen, musste ich mich überzeugen, dass es vortheilhaft wäre, den Rahmen zu erweitern, und in denselben einige einleitende Begriffe eintreten zu lassen, welche die Gelehrten ohne Zweifel für zu bekannt und zu elementar ansehen werden. Im Gegentheil hoffe ich, dass diejenigen, welche das Studium der descriptiven Geometrie anfangen, in ihnen diejenigen Lehren finden werden, welche gegenwärtig das wirksamste Hilfsmittel darstellen, um in diese Wissenschaft einzudringen.

---

[1]) Ausserdem benutzte ich die Arbeiten von MONGE, DUPIN, PONCELET, JACOBI, PLUECKER, HESSE, GRASSMANN, KUMMER, SCHLAEFLI, STAUDT, JONQUIÈRES, LA GOURNERIE, BELLAVITIS, SCHRÖTER, PAINVIN, BISCHOF, BATTAGLINI, SCHWARZ, FIEDLER, REYE u. A.

INHALTS-VERZEICHNISS.

NB! Die wesentlich veränderten oder neuen Nummern der deutschen Ausgabe sind durch einen Stern kenntlich gemacht.

ERSTER THEIL.

[Cap. I—VIII; No. 1—60.]

ZWEITER THEIL.

[Cap. I—X; No. 61—182.]

*DRITTER THEIL.

[Cap. I—VII; No. 183—289.]

DRUCKFEHLER.

Seite	6,	Zeile	1:	Für „durch“ setze man „auch“.
-	6,	-	21:	- „Curven“ - - „Curve“.
-	11,	-	17:	- „biosculierende Ebenen“ setze man „Doppelgeneratrixen“.
-	45,	-	17:	- „$\varkappa\rho+1 U\rho+1 + \varkappa\rho+2 U\rho+2 + \ldots + \varkappa\mu+1 U\mu+1 = 0$“ setze man: $\varkappa_{\rho+1} U_{\rho+1} + \varkappa_{\rho+2} U_{\rho+2} + \cdots + \varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1} = 0$“.
-	60,	-	26:	- „Dreht man die Ebene r“, setze man: „Dreht man die Ebene um r“.
-	65,	-	7:	- „Polaren“ setze man „Polarflächen“.
-	66,	-	25:	- „$(\nu-1)(\nu-2)-6$“ setze man: $\nu(\nu-1)(\nu-2)-6$“.
-	75,	-	19:	- „$(\rho-\sigma)$-fach“ - - „$(\sigma-\rho)$-fach“.
-	92,	-	25:	tilge man am Ende der Zeile den Buchstaben χ.
-	95,	-	20:	für $\nu^1+\nu_2)$-ter“ setze man „$(\nu_1+\nu_2)$-ter“.
-	99,	-	20:	- „auf“ - - „in“
-	104,	-	27:	- „zwei“ - - „drei“.
-	117,	-	1 v. u.	- „auf“ - - „in“.
-	125,	-	10:	- „$\mathfrak{S}_{\mu+2}$“ - - „$\mathfrak{S}_{\mu,2}$“.
-	126,	-	24:	- „ν_2-ter“ - - „ν^2-ter“.
-	128,	-	39:	- „ν_3“ - - „ν^3“.
-	165,	-	13:	- „p^4“ - - „p_4“.
-	206,	-	28:	- „b^1“ - - „b_1“.

ERSTER THEIL.

CAPITEL I.

KEGEL.

1. *Kegel* ist der Ort einer Geraden (*Generatrix, Erzeugende*), die sich um einen festen Punct oder Scheitel 𝔳 nach einem gegebnen Gesetze continuierlich bewegt, zum Beispiel, indem sie stets eine gegebne Curve schneidet.

Ein Kegel heisst von der *ν-ten Ordnung*, wenn eine beliebig durch den Scheitel gelegte Ebene ihn in ν (reellen, imaginairen, getrennten, zusammenfallenden) Generatrixen schneidet.

Ein Kegel ν-ter Ordnung wird von einer beliebigen Geraden in ν Puncten getroffen, und eine willkürliche Ebene schneidet ihn in einer Curve ν-ter Ordnung.

Ein Kegel erster Ordnung ist eine Ebene.

2. Trifft eine Gerade r einen Kegel in zwei unendlich nahen Puncten 𝔪, 𝔪′, so heisst sie *Tangente* des Kegels in 𝔪. Jede Ebene, welche durch r gelegt ist, schneidet den Kegel in einer Curve, die r in eben diesem Puncte 𝔪 berührt. Wenn r umgekehrt einen Schnitt des Kegels berührt, so ist sie auch eine Tangente des Kegels.

Die Ebene, welche durch 𝔳 und die Tangente r gelegt ist, enthält natürlich zwei unendlich nahe Generatrixen 𝔳 𝔪, 𝔳 𝔪′. Also liegen die Tangenten des Kegels in den verschiedenen Puncten ein und derselben Generatrix 𝔳 𝔪 sämmtlich in ein und derselben Ebene. Diese Ebene heisst *Tangentialebene* des Kegels und die Gerade 𝔳 𝔪 *Berührungsgeneratrix*.

Ebenso wie zwei unmittelbar auf einander folgende Generatrixen 𝔳 𝔪, 𝔳 𝔪′ in der Ebene liegen, welche längs 𝔳 𝔪 berührt, schneiden sich zwei unmittelbar folgende Tangentialebenen, nämlich längs 𝔳 𝔪 und 𝔳 𝔪′, in der Erzeugenden 𝔳 𝔪′. Man kann folglich den Kegel sowohl als *Ort von Geraden* (Generatrixen) als auch als *Enveloppe von Ebenen* (Tangentialebenen) auffassen.

Classe eines Kegels ist die Zahl derjenigen Tangentialebenen desselben, die durch einen beliebig im Raume angenommenen Punct hindurchgehen, oder auch durch eine Gerade, welche beliebig durch den Scheitel gelegt ist. Ein Kegel erster Classe ist eine Gerade, das heisst ein *Büschel von Ebenen*, die sämmtlich durch dieselbe Gerade gehen.

Schneidet man den Kegel durch eine beliebige Ebene, so erhält man eine Curve oder einen Schnitt, dessen Puncte und Tangenten die Spuren der Erzeugenden und der Tangentialebenen des Kegels sind. Diese Curve ist daher nicht nur von derselben Ordnung als der Kegel, sondern auch von der nämlichen Classe.

3. Den Singularitäten der Curve entsprechen ebensoviele Singularitäten des Kegels und umgekehrt. Wir nennen diejenigen Erzeugenden *Doppel-* (Knoten- oder conjugierte), *dreifache*, . . . , *Stillstands-* oder *Rückkehrgeneratrixen*, welche den Doppelpuncten, den dreifachen Puncten, . . . , und den Spitzen des Schnittes entsprechen; dagegen *Doppeltangentialebenen*, *dreifache Tangentialebenen*, ... , *Wendeebenen* diejenigen Ebenen, welche durch $\mathfrak{v}$ gehen, und deren Spuren die Doppeltangenten, dreifachen Tangenten, . . . , Wendetangenten des Schnittes sind. Eine Doppelgeneratrix ist die Durchschnittsgerade zweier Schalen der Fläche, die reell oder imaginär sein können. Werden diese beiden Schalen von ein und derselben Ebene berührt, so geht die Doppelgeneratrix in die Rückkehrgeneratrix über. Eine Doppeltangentialebene berührt den Kegel in zwei verschiedenen Generatrixen; eine Wendeebene berührt denselben in zwei unmittelbar folgenden Generatrixen *(Beugung)*; u. s. w.

Man bezeichne durch:

ν die Ordnung und durch
μ die Classe des Kegels; es sei ferner
δ die Zahl der Doppelgeneratrixen,
$\varkappa$ „ „ „ Rückkehrgeneratrixen,
τ „ „ „ Doppeltangentialebenen und
ι „ „ „ Wendeebenen.

Da diese nämlichen Zahlen die analogen Singularitäten der ebenen Curven ausdrücken, so greifen für sie die Formeln von Plücker[1]) Platz:

$$\mu = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$
$$\nu = \mu(\mu-1) - 2\tau - 3\iota,$$
$$\iota = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varkappa,$$
$$\varkappa = 3\mu(\mu-2) - 6\tau - 8\iota,$$

von denen eine jede die Folge aus den drei übrigen ist.

4. Die Eigenschaften der Kegel und im Allgemeinen der Figuren, die aus Geraden und Ebenen zusammengesetzt sind, welche sämmtlich durch einen festen Punct, den Scheitel, gehen, lassen sich aus denen der ebenen Curven und der aus Puncten und Geraden zusammengesetzten Figuren, welche

[1]) Cremona, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*, Nr. 99 u. 100.

in einer festen Ebene gezeichnet sind, herleiten entweder mittelst der Lehre von den Projectionen oder der Perspective, oder vermittelst des Princips der Dualität. In letzterm Falle entsprechen den Puncten und den Geraden der ebenen Figur bezüglich die Ebenen und die Geraden der conischen Figur.

Wir fügen hier den Ausspruch einiger Lehrsätze hinzu, die aus der Theorie der ebenen Curven hergeleitet sind. In ihnen hat man sich vorzustellen, dass alle Geraden und Ebenen durch den nämlichen festen Punct gelegt sind, welcher der gemeinsame Scheitel aller Kegel ist, deren noch Erwähnung geschehen wird.

Zwei Kegel von den Ordnungen ν, ν' und den Classen μ, μ' haben $\nu\nu'$ gemeinschaftliche Erzeugende und $\mu\mu'$ gemeinschaftliche Tangentialebenen. Besitzen die beiden Kegel längs einer gemeinsamen Generatrix dieselbe Tangentialebene, so haben sie ausserdem nur noch $\nu\nu'-2$ gemeinschaftliche Generatrixen und $\mu\mu'-2$ gemeinschaftliche Tangentialebenen.

Ein Kegel der ν-ten Ordnung oder Classe, dessen Scheitel gegeben ist, wird durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Bedingungen bestimmt. Durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebene Gerade geht nur ein einziger Kegel ν-ter Ordnung, und $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebne Ebenen berühren einen einzigen Kegel ν-ter Classe. Durch die gemeinschaftlichen Generatrixen zweier Kegel ν-ter Ordnung gehen unendlich viele Kegel derselben Ordnung hindurch, die einen Complex bilden, welchen man *Kegelbüschel* ν-ter Ordnung nennt. Ein Kegel ν-ter Ordnung kann nicht mehr als $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}$ Doppelgeneratrixen besitzen — die Rückkehrgeneratrixen eingeschlossen —, ohne in Kegel niederer Ordnung zu zerfallen. U. s. w.

Eine Ebene, die man beliebig durch eine feste Gerade gelegt hat, schneidet einen gegebenen Kegel ν-ter Ordnung in ν Erzeugenden. Dann ist der Ort der harmonischen Axen [1]) ρ-ten Grades des Systems der ν Generatrixen in Bezug auf die feste Gerade ein Kegel ρ-ter Ordnung, den man den $(\nu-\rho)$-ten *Polarkegel* der festen Geraden *(Polargeraden)* in Bezug auf den gegebenen Kegel *(Fundamentalkegel)* nennen kann. Auf diese Weise gibt eine gerade Linie $\nu-1$ Polarkegeln Entstehung, deren Ordnungszahlen der Reihe nach $\nu-1$, $\nu-2$, . . . , 2, 1 sind. Der letzte Polarkegel ist eine Ebene. Wenn der ρ-te Polarkegel einer Geraden durch eine andere Gerade geht, so enthält umgekehrt der $(\nu-\rho)$-te Polarkegel dieser letzeren Geraden die erstere. Die Polarkegel einer Generatrix des Fundamentalkegels berühren denselben längs dieser Generatrix. Die Polarkegel $(\nu-1)$-ter Ordnung der Geraden einer festen Ebene bilden ein Büschel. Die Geraden, welche Doppelgeneratrixen von Polarkegeln $(\nu-1)$-ten Ordnung

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 19, 68.

sind, bilden einen Kegel (den *Hesseschen*) von der Ordnung $3(\nu-2)$, welcher den Fundamentalkegel in den Inflexionsgeneratrixen des letzern schneidet, u. s. w. [1])

5. Ein Kegel zweiter Ordnung ist auch zweiter Classe und umgekehrt. Die Theorie dieser Kegel *(Quadrikegel)* ist eine unmittelbare Folge der Theorie der Kegelschnitte. [2])

Ein Kegel dieser Art kann sowohl als Ort der Durchschnittsgeraden zweier entsprechender Ebenen in zwei projectivischen Ebenenbüscheln [3]) — die immer als durch denselben festen Punct gehend angenommen werden — erzeugt werden, und auch als Enveloppe der Ebenen, welche durch zwei entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel hindurchgehen. Diese Strahlenbüschel liegen in verschiedenen Ebenen, haben aber denselben Mittelpunct. Umgekehrt erzeugen in einem Quadrikegel die Ebenen, welche durch dieselbe variable Generatrix und bezüglich durch zwei feste Generatrixen gehen, zwei projectivische Büschel; und eine variable Tangentialebene schneidet zwei feste Tangentialebenen in Geraden, welche zwei projectivische Strahlenbüschel bilden. [4])

Wir nennen zwei Gerade *conjugiert*, von denen die eine in der Polarebene der andern liegt, und zwei Ebenen heissen *conjugiert*, von denen eine jede die Polargerade der andern enthält. Zwei conjugierte Gerade bilden mit den beiden Generatrixen des Fundamentalkegels, die in ihrer Ebene enthalten sind, ein harmonisches System, und der Winkel zweier conjugierter Ebenen wird von *den* Tangentialebenen des Kegels harmonisch getheilt, welche durch die gemeinschaftliche Durchschnittsgerade der beiden ersten Ebenen gehen.

Ein Trieder heisst einem Quadrikegel *conjugiert*, wenn jede Kante desselben die entgegenstehende Seitenebne als Polarebene hat. Zwei demselben Kegel conjugierte Trieder sind einem zweiten Kegel eingeschrieben und einem dritten umgeschrieben. Ist ein Kegel einem Trieder umgeschrieben, das einem andern Kegel conjugiert ist, so ist umgekehrt der letztere Kegel einem Trieder eingeschrieben, welches dem ersten Kegel conjugiert ist. Zwei Kegel haben ein conjugirtes Trieder gemein, dessen Seitenebenen die Diagonalebenen des vollständigen Tetraeders sind, das durch die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der beiden Kegel gebildet wird, und dessen Kanten die

---

[1]) *Einleitung*, §. 13 u. 15.

[2]) *Einleitung*, §. 11 u. 18.

[3]) Zwei Ebenenbüschel heissen *projectivisch*, wenn man jedes durch eine Ebene, die nicht zu dem Büschel gehört, schneidet, und die dadurch entstehenden Strahlenbüschel projectivisch sind. *Doppelverhältniss von vier Ebenen des Ebenenbüschels* ist das Doppelverhältniss der vier entsprechenden Strahlen des auf die obige Weise entstandenen Strahlenbüschels.

[4]) Chasles, *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré.* (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles, T. 6; 1830).

Durchschnittsgeraden der entgegengesetzten Ebenenpaare sind, welche durch die denselben beiden Kegeln gemeinschaftlichen Erzeugenden hindurchgehen; u. s. w.

Ein Kegel zweiter Ordnung, der eine Doppelgerade enthält, ist das System zweier Ebenen, die durch diese Gerade gehen. Ein Kegel zweiter Classe, der eine Bitangentialebene besitzt, besteht aus dem Systeme zweier Geraden, die in dieser Ebene liegen.

Diejenigen Quadrikegel, welche drei gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen sind und so beschaffen, dass jeder Kegel durch zwei Gerade nur auf eine einzige Weise bestimmt ist, bilden einen Complex, den man ein *Netz* nennen kann. In einem Netze von Quadrikegeln gibt es eine unbegrenzte Zahl, die sich in Ebenenpaare auflösen, das heisst, eine Doppelgerade besitzen. Die Enveloppe dieser Ebenen ist ein Kegel dritter Classe, und der Ort der Doppelgeraden ein Kegel dritter Ordnung. U. s. w. [1])

CAPITEL II.

DEVELOPPABLE FLÄCHEN UND RAUMCURVEN.

6. Wir betrachten eine Curve als den Ort aller Lagen eines Punctes, welcher sich continuierlich im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass eine beliebige Ebene nur ein System getrennter Lagen des Mobils enthält. [2]) Die Curve heisst *gewunden* oder eine *Raumcurve,* wenn vier *ganz beliebige* Puncte derselben nicht in ein und derselben Ebene enthalten sind.

Die Curve heisst von der *ν-ten Ordnung,* wenn eine beliebige Ebene sie in ν Puncten — die reell, imaginär, verschieden, zusammenfallend sein können — schneidet. Es folgt aus dieser Definition, dass eine *Raumcurve* mindestens von der dritten Ordnung ist.

Die Gerade, welche den Punct $\mathfrak{m}$ der Curve mit dem unmittelbar folgenden Puncte $\mathfrak{m}'$ verbindet, heisst *Tangente* der Curve in $\mathfrak{m}$. Jede Ebene, welche durch die Gerade $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$ hindurchgeht, heisst ebenfalls *Tangentialebene* der Curve in $\mathfrak{m}$ und kann anderswo die Curve nur noch in $\nu-2$ Puncten treffen.

Classe einer Raumcurve ist die Zahl ihrer Tangentialebenen, welche

---

[1]) Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, wiederhole ich, dass in den Sätzen dieser Nummer und in denen der vorhergehenden, die Kegel, von denen die Rede ist, sämmtlich denselben Scheitel besitzen, durch den alle Geraden und alle Ebenen hindurchgehen, die in Betracht gekommen.

[2]) Das heisst in der Art, dass alle auf einanderfolgende Lagen des sich bewegenden Punctes von der Veränderung eines einzigen Parameters abhängen. Eine Curve kann man daher eine *einfach unendliche Reihe von Puncten* nennen.

durch eine beliebige Gerade hindurchgehen, oder durch die Zahl ihrer Tangenten, welche durch die willkürliche Gerade geschnitten werden.

Es seien m, m', m'', m''', ... unendlich nahe auf einander folgende Puncte der Curve. Dann haben die beiden unmittelbar folgenden Tangenten m m', m' m'' den Punct m' gemein und bestimmen eine Ebene m m' m'', die man, weil sie eine dreipunctige Berührung mit der Curve hat, *Osculationsebene* in m nennt. Zwei auf einander folgende Osculationsebenen m m' m'', m' m'' m''' schneiden sich in der Tangente m' m'', und drei unmittelbar folgende Osculationsebenen m m' m'', m' m'' m''', m'' m''' m^{IV} treffen sich im Puncte m'' der Curve.

Es ist folglich ein Punct der Curve sowohl durch zwei unmittelbar folgende Tangenten bestimmt, als durch drei unmittelbar folgende Osculationsebenen; ebenso eine Tangente entweder durch zwei unendlich nahe Puncte der Curve oder durch zwei unmittelbar folgende Osculationsebenen; eine Osculationsebene endlich ist bestimmt durch drei unmittelbar folgende Puncte oder durch zwei unmittelbar folgende Tangenten.

7. Man nennt den Ort der Tangenten einer Curve eine *abwickelbare Fläche* oder eine *Developpable;* die Tangenten sind die *Generatrixen* der abwickelbaren Fläche. *Ordnung* der Developpablen ist die Zahl der Puncte, in denen dieselbe von einer willkürlichen Geraden geschnitten wird, daher ist diese Zahl gleich der Classenzahl der Curven. Die Osculationsebene m m' m'', der Curve im Puncte m heisst die *Tangentialebene* der Developpablen längs der Generatrix m m', denn sie enthält die beiden unmittelbar folgenden Erzeugenden m m', m' m'', und es ist folglich jede in der Ebene gezogene Gerade Tangente der abwickelbaren Fläche — das heisst sie trifft sie in zwei unendlich nahen Puncten — in einem Puncte der *Berührungsgeneratrix* m m' und umgekehrt, jede Tangente der Developpablen in einem Puncte dieser Generatrix liegt in der genannten Ebene. Wie jede Tangentialebene der abwickelbaren Fläche zwei unmittelbar folgende Erzeugende enthält, so liegt jede Generatrix in zwei unmittelbar folgenden Tangentialebenen; die abwickelbare Fläche ist also gleichzeitig *der Ort der Tangenten der Curve* und *die Enveloppe der Osculationsebenen* derselben.

Wir haben den Begriff der *Developpablen* aus dem der *Curve* entwickelt, wir können aber auch die Curve aus der abwickelbaren Fläche herleiten. Wir denken uns eine Ebene, die sich stetig im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass durch einen beliebig gewählten Punct nur ein System getrennter Lagen der beweglichen Ebene hindurchgeht. [1]) Die Enveloppe der Lagen der sich bewegenden Ebene oder auch der Ort der Geraden, in

---

[1]) Das heisst in der Art, dass alle Lagen der beweglichen Ebene von der Veränderung eines einzigen Parameters abhängen. Eine abwickelbare Fläche ist daher eine *einfach unendliche Reihe von Ebenen.* Die Kegel stellen einen speciellen Fall davon dar.

welchen sich zwei unmittelbar folgende Lagen dieser Ebene schneiden, ist das, was man eine *abwickelbare Fläche* nennt. [1])

Es seien P, P', P'', P''' . . . auf einander folgende Lagen der sich bewegenden Ebene. Die Ebene P enthält dann die beiden unmittelbar folgenden Geraden PP', $P'P''$. Die drei Ebenen P, P', P'' schneiden sich in einem Puncte, dessen Ort eine gewisse auf der Developpablen gelegene Curve ist. Der Punct $PP'P''$ liegt in den beiden unmittelbar folgenden Erzeugenden PP', $P'P''$, und umgekehrt enthält die Generatrix $P'P''$ die beiden unmittelbar folgenden Puncte $PP'P''$, $P'P''P'''$ der Curve. Die Generatrixen der Developpablen sind folglich Tangenten der Curve. Die Ebene P'' enthält die drei unmittelbar folgenden Puncte $PP'P''$, $P'P''P'''$, $P''P'''P^{IV}$, und es sind daher die Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche Osculationsebenen der Curve.

Classe der abwickelbaren Fläche ist die Zahl ihrer Tangentialebenen, welche durch einen willkürlich im Raume angenommenen Punct gelegt werden können.

8. Wir können bei den Developpablen die analogen Singularitäten betrachten, die wir schon bei den Kegeln bemerkt haben (3). Eine Tangentialebene heisst *doppelt,* wenn sie die abwickelbare Fläche längs zweier verschiedener Erzeugenden berührt und folglich die Curve, deren Tangenten die Generatrixen der abwickelbaren Fläche sind, in zwei getrennten Puncten osculiert; sie heisst eine *stationäre* oder *Wendeebene,* wenn sie die Developpable längs zweier unmittelbar folgender Erzeugenden berührt, oder, was dasselbe ist, längs dreier unmittelbar folgender Generatrixen schneidet und folglich mit der Curve einen vierpunctigen Contact hat. Eine Generatrix ist *doppelt,* wenn längs derselben die Developpable zwei verschiedne Tangentialebenen hat, weshalb sie auch die Curve in zwei verschiedenen Puncten berührt. In dem Schnitte, der durch eine beliebige durch sie gelegte Ebene entsteht, zählt sie für *zwei* Gerade, und in den beiden Schnitten, welche durch die beiden Tangentialebenen entstehen für *drei.* Eine Generatrix heisst *stationär,* wenn durch sie drei unmittelbar folgende Tangentialebenen der Developpablen hindurchgehen; in ihr liegen daher drei unmittelbar folgende Puncte der Curve. Eine solche zählt in dem Schnitte, der durch eine beliebige Ebene entsteht, welche durch sie hindurchgeht, für *zwei* und für *drei* Gerade in dem von der Tangentialebene gebildeten Schnitte.

Den beiden ersten Singularitäten entsprechen die folgenden Singularitäten der Raumcurve. Ein Punct der Curve heisst *doppelt,* wenn in demselben zwei verschiedne Tangenten existieren und folglich zwei verschiedne Osculationsebenen; er heisst *Stillstandspunct (Spitze),* wenn sich in ihm drei aufeinanderfolgende Tangenten schneiden, oder auch vier aufeinanderfolgende Osculationsebenen. Ein Doppelpunct — und ebenso eine Spitze — vertritt

---

[1]) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie,* §. XII.

vier Durchschnittspuncte mit jeder Osculationsebene und mit der Ebene der beiden Tangenten; er vertritt *drei* Schnittpuncte für jede andere Ebene, welche durch eine der beiden Tangenten geht, und nur *zwei* für jede andere Ebene, welche durch den Punct selbst hindurchgeht.

Die Developpable und die Curve können andere Singularitäten höherer Art haben, die wir aber jetzt nicht in Betracht ziehen wollen.

9. Wir schneiden die abwickelbare Fläche durch eine Ebene **P**; der entstehende Schnitt ist dann eine Curve von der nämlichen Ordnung als die abwickelbare Fläche. Die Puncte derselben sind die Spuren der Generatrixen und ihre Tangenten die Spuren der Tangentialebenen, weil, wie schon früher bemerkt wurde, jede Gerade, die in einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche gezogen ist, auch Tangente dieser Fläche ist. Es folgt daher, dass auch die Classe des Schnittes mit der Classe der abwickelbaren Fläche zusammenfällt, denn die Tangenten, die sich an dieselbe durch einen beliebigen Punct ihrer Ebene ziehen lassen, sind die Spuren der Ebenen, welche von dem nämlichen Puncte ausgehend die Developpable berühren. Die Doppeltangenten der Schnittcurve bestehen ausser den Spuren der doppelten Tangentialebenen aus den Geraden der Ebene **P**, durch welche zwei Tangentialebenen gehen, und die Wendetangenten endlich sind die Spuren der Wendeebenen.

Jeder Punct **m** der Raumcurve, deren Tangenten die Erzeugenden der developpablen Fläche sind, der in der Ebnen **P** liegt, ist eine Spitze des Schnittes. Da nämlich dieser Punct der Durchschnitt von drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen ist, so müssen sich in ihm drei aufeinanderfolgende Tangenten des Schnittes schneiden. Dieser Eigenschaft wegen gibt man der Raumcurve den Namen *Rückkehrkante* oder *Cuspidalcurve* der Developpablen. Dem entsprechend nennt man die Enveloppe der Osculationsebene einer Raumcurve ihre *osculierende Developpable*.

Die Geraden, die in der Ebene **P** willkürlich durch den Punct **m** gezogen sind, treffen in ihm die Schnittcurve in zwei zusammenfallenden Puncten, aber es gibt eine Gerade, die Rückkehrtangente, das heisst die Spur der Osculationsebene der Raumcurve in **m**, für welche der Punct **m** drei zusammenfallende Schnittpuncte darstellt. Es trifft folglich eine willkürlich durch einen Punct der Cuspidalcurve gelegte Gerade dort die Developpable in zwei zusammenfallenden Puncten, unter diesen Geraden gibt es aber eine unbegrenzte Zahl, für welche dieser Punct einen dreifachen Berührungspunct darstellt, und der Ort dieser Geraden ist die Ebene, welche in jenem Puncte die Curve osculiert.

Schneiden sich zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen auf der Ebene **P**, so ist der Schnittpunct für die Schnittcurve ein Doppelpunct, weil diese in ihm von den Spuren der beiden Ebenen berührt wird, welche die abwickelbare Fläche längs jener Erzeugenden berühren. Diese Spuren sind die einzigen Geraden, welche in jenem Puncte eine dreifache Berührung mit dem Schnitte haben, während jede andere in der Ebene **P** durch den näm-

lichen Punct gezogene Gerade dort den Schnitt nur in zwei zusammenfallenden Puncten trifft. Alle analogen Puncte, nämlich die Durchschnittspuncte zweier nicht aufeinander folgenden Erzeugenden, bilden auf der abwickelbaren Fläche eine Curve, welche wir wegen der eben angemerkten Eigenschaft die *Doppelcurve* oder die *Knotencurve* der Developpablen nennen. Die Tangente der Doppelcurve in einem beliebigen ihrer Puncte ist offenbar die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen, welche in diesem Puncte die Developpable berühren.

Eine Gerade also, welche willkürlich durch einen Punct der Doppelcurve gelegt ist, trifft dort die Developpable in zwei zusammenfallenden Puncten, aber unter den analogen Geraden gibt es eine unbegrenzte Zahl für welche dieser Punct drei vereinigte Durchschnittspuncte repräsentiert, und der Ort derselben wird von den beiden Ebenen gebildet, welche die abwickelbare Fläche längs der Generatrixen berühren, die sich in diesem Puncte kreuzen.

Dagegen liegen, wie schon bemerkt wurde, die Geraden, welche die Developpable in einem gewöhnlichen Puncte berühren, sämmtlich in einer einzigen Ebene, der Tangentialebene längs der einzigen Generatrix, die durch jenen Punct geht, und haben mit der abwickelbaren Fläche eine zweipunctige Berührung.

Ausserdem enthält der Schnitt eine Spitze in der Spur jeder stationären Generatrix und einen Doppelpunct in der Spur jeder Doppelgeneratrix.

10. Es bezeichne jetzt:

- ν die Ordnung der gegebenen Raumcurve,
- μ die Classe des osculierenden Developpablen,
- ρ die Ordnung dieser Fläche oder auch die Classe der Raumcurve,
- γ die Zahl der Geraden, die in einer beliebigen Ebene **P** liegen, und durch welche jedesmal zwei Tangentialebenen der Developpablen gehen, die Zahl der doppelten Tangentialebenen eingeschlossen, wenn es solche gibt,
- ξ die Zahl der Puncte der Ebene **P**, durch welche jedesmal zwei Generatrixen der abwickelbaren Fläche gehen, also die Ordnung der Doppelcurve, die Zahl der Doppelgeneratrixen eingeschlossen, wenn es solche gibt,
- α die Zahl der Wendeebenen und
- θ die Zahl der stationären Generatrixen.

Nun ist der Schnitt, der durch die Ebene **P** in der Developpablen erzeugt wird, eine Curve ρ-ter Ordnung und μ-ter Classe, die ξ Doppelpuncte besitzt und $\nu+\theta$ Spitzen, γ Doppeltangenten und α Wendepuncte. Also erhalten wir mit Hilfe der Formeln von Plücker:

$$\begin{cases}\mu = \rho(\rho-1) - 2\xi - 3(\nu+\theta),\\ \rho = \mu(\mu-1) - 2\gamma - 3\alpha,\\ \nu + \theta - \alpha = 3(\rho-\mu).\end{cases}$$

11. Man betrachte einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ des Raumes als Scheitel eines Kegels, der durch die gegebne Raumcurve geht *(Perspectivkegel)*. Die

Erzeugenden dieses Kegels sind die Geraden, welche vom Puncte $\mathfrak{o}$ nach den Puncten der Curve gehen, und die Tangentialebenen des Kegels sind diejenigen Ebenen, die durch den Scheitel und die Tangente der Curve hindurchgehen. Eine durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet den Kegel in so vielen Generatrixen, als die Curve Puncte in dieser Ebene besitzt. Die Ordnung des Kegels ist also gleich der Ordnung der Curve. Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}'$ des Raumes gehen so viele Tangentialebenen des Kegels, als es Tangenten der Curve gibt, welche durch die Gerade $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'$ geschnitten werden; die Classe des Kegels ist also gleich der Classe der Curve oder auch gleich der Ordnung der osculierenden Developpablen.

Doppelgeneratrixen des Kegels sind die Geraden, welche den Punct $\mathfrak{o}$ mit den Doppelpuncten der Curve verbinden, und dann noch die Geraden, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen und sich in zwei verschiednen Puncten auf die Curve stützen, weil in beiden Fällen der Kegel längs derselben Generatrix zwei Tangentialebenen besitzt. — Ferner sind diejenigen Geraden stationäre Generatrixen, welche den Scheitel $\mathfrak{o}$ mit den Spitzen der Curve verbinden.

Ist eine durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene eine Osculationsebene der Curve, so ist sie für den Kegel eine Wendeebene, weil sie drei aufeinanderfolgende Erzeugende enthält. Zieht man durch $\mathfrak{o}$ willkürlich in der Wendeebene eine Gerade, so zählt diese Ebene für *zwei* der ρ Ebenen, welche durch die Gerade gehen und den Kegel berühren; aber es gibt eine Gerade, die Berührungsgeneratrix der Wendeebene, für welche diese Ebene *dreimal* [1]) gezählt wird. Ziehen wir also in einer Osculationsebene der Curve eine beliebige Gerade, so zählt die Osculationsebene unter den Ebenen, welche sich durch diese Gerade so ziehen lassen, dass sie die Curve berühren, für *zwei*, aber es gibt eine unbegrenzte Zahl von Geraden, für welche die Osculationsebene *dreimal* zählt. Alle diese Geraden gehen durch den Osculationspunct.

Berührt eine Ebene, welche durch $\mathfrak{o}$ geht, die Curve in zwei verschiedenen Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, so berührt sie den Kegel längs zwei Erzeugenden $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}$ und ist folglich eine doppelte Tangentialebene des Kegels. Die Bitangentialebene zählt für *zwei* unter den Tangentialebenen des Kegels, welche durch eine beliebige in der Bitangentialebene selbst durch $\mathfrak{o}$ gelegte Gerade gehen; sie zählt für *drei*, wenn die Gerade eine der beiden Berührungsgeneratrixen ist. Zieht man daher in einer Bitangentialebene der Raumcurve eine beliebige Gerade, so zählt diese Ebene für *zwei* Ebenen, welche durch diese Gerade gehen und die Curve berühren, aber sie zählt für *drei* in Bezug auf die unbegrenzte Zahl von Geraden, die man in besagter Ebene durch den einen oder andern Berührungspunct ziehen kann.

Alle analogen Ebenen, von denen eine jede die Raumcurve in zwei Puncten berührt oder, was dasselbe ist, zwei nicht unmittelbar folgende Tangenten enthält, haben zur Enveloppe eine abwickelbare Fläche, welche man

---

[1]) Dies ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft der ebenen Curven. *Einleitung*, Nr. 31.

die *doppeltumgeschriebne* oder *doppeltberührende* Developpable der Curve nennt. Jede dieser Ebenen berührt die Developpable längs der Geraden, welche die beiden Berührungspuncte der Ebene und der gegebnen Curve mit einander verbindet.

Ausserdem ist jede Ebene, welche durch eine doppelte Tangente geht eine Bitangentialebene des Kegels, und jede Gerade, welche durch eine Wendetangente gelegt ist, eine Wendeebene des Kegels.

12. Bezeichnen wir also durch:

- ϑ die Zahl der Geraden, welche sich von einem willkürlichen Puncte $\mathfrak{o}$ so ziehen lassen, dass sie die Raumcurve zweimal treffen unter Hinzunahme der Zahl der Doppelpuncte dieser Curve, oder mit andern Worten die Zahl der *scheinbaren* und *wirklichen* Doppelpuncte; durch
- η die Zahl der Ebenen, die durch $\mathfrak{o}$ gehen, und zwei nicht unmittelbar folgende Tangenten der Curve enthalten oder auch die Classe der doppeltberührenden Developpablen unter Hinzunahme der Zahl der biosculierenden Ebenen; und mit
- β die Zahl der Spitzen der Curve,

so ist der Perspectivkegel, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$ ist, von der ν-ten Ordnung, der ρ-ten Classe, er hat ϑ Doppelgeneratrixen, β stationäre Generatrixen, η Bitangentialebenen und $\mu+\theta$ Wendeebenen. Wir haben folglich (3):

$$\begin{cases} \rho = \nu(\nu-1) - 2\vartheta - 3\beta, \\ \nu = \rho(\rho-1) - 2\eta - 3(\mu+\theta), \\ \mu + \theta - \beta = 3(\rho-\nu). \end{cases}$$

Die sechs vorstehenden Gleichungen verdankt man CAYLEY [1]. Mittelst derselben oder anderer, die sich aus ihnen ableiten lassen, wie zum Beispiel die folgenden:

$$\begin{cases} \alpha-\beta = 2(\mu-\nu), \\ \xi-\eta = \mu-\nu, \\ 2(\gamma-\vartheta) = (\mu-\nu)(\mu+\nu-7), \end{cases}$$

kann man jedesmal, wenn vier von den zehn Grössen

$$\nu,\ \mu,\ \rho,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \vartheta,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

gegeben sind, die andren sechs bestimmen. Die gegebenen Zahlen dürfen aber weder ρ, θ, ξ, β noch ρ, θ, η, α sein, weil man aus den obigen Gleichungen die folgenden Relationen herleiten kann:

$$\rho(\rho-4) - 2\theta = 2\xi + \beta = 2\eta + \alpha.$$ [2]

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, dass die Untersuchung der Raumcurven nicht von der der developpablen Flächen getrennt werden kann. Man darf sagen, dass eine Developpable mit ihrer Cuspidalcurve ein *einziges*

[1]) *Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables* (Journal de Liouville, T. 10; 1845). — *On a special sextic developable* (Quarterly Journal of mathematics, T. 7; 1866).

[2]) ZEUTHEN, *Sur les singularités des courbes géométriques à double courbure* (Compte rendu, 27 juillet 1868).

System bildet, in dem man Puncte (die Puncte der Curve), Gerade (die Tangenten der Curve oder die Generatrixen der Fläche) und Ebenen (die Tangentialebenen der Developpablen) zu betrachten hat. Endlich kann man in der nämlichen Weise, wie die Eigenschaften der Kegel sich aus denen der ebenen Curven mittelst des Princips der Dualität ableiten lassen, die Raumcurven und die abwickelbaren Flächen, die nicht Kegel sind, in Correlation setzen, das heisst, die Eigenschaften des einen Systems, dessen Charakteristiken

$$\nu,\ \mu,\ \rho,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \vartheta,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

sind, aus den Eigenschaften des reciproken Systems herleiten, dessen Charakteristiken heissen:

$$\mu,\ \nu,\ \rho,\ \beta,\ \alpha,\ \vartheta,\ \gamma,\ \eta,\ \xi,\ \theta.$$

13. Wir haben gesehen, wie die Charakteristiken des Perspectivkegels einer Raumcurve und eines Schnittes der Developpablen bestimmt werden können, wenn der Scheitel des Kegels und die Schnittebene vollständig willkürlich sind. In entsprechender Weise geht man vor, wenn jener Punct oder jene Ebene eine specielle Lage haben. Wir wollen hier einige Beispiele geben.

Geht die schneidende Ebene durch eine Gerade t des Systems, so ist der Schnitt aus dieser Geraden und einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung zusammengesetzt. Die Classe dieser Curve ist μ wie im allgemeinen Falle. Die Zahl der Spitzen ist $\nu+\theta-2$, weil die schneidende Ebene, da sie die Cuspidalcurve berührt, diese nur noch in andern $\nu-2$ Puncten trifft. Die Formeln von Plücker lehren nun, dass die Schnittcurve $\alpha+1$ Wendepuncte, $\gamma-1$ Doppeltangenten und $\xi-\rho+4$ Doppelpuncte besitzt. Wir haben also einen Wendepunct mehr als in dem allgemeinen Falle, und dieser neue Wendepunct ist der Punct $\mathfrak{m}$, in welchem die Gerade t die Cuspidalcurve berührt. Dass die Gerade t die Schnittcurve im Puncte $\mathfrak{m}$ berührt, folgt daraus, dass $\mathfrak{m}$ für den vollständigen Schnitt eine Spitze sein muss. Da ferner t der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen des Systems ist, so gehen durch einen beliebigen Punct von t nur $\mu-2$ Tangenten der Schnittcurve und durch $\mathfrak{m}$ gehen ausser t nur noch $\mu-3$. Also ist t eine Wendetangente für diese Curve. Im gegenwärtigen Falle hat die Schnittcurve nur $\xi-\rho+4$ Doppelpuncte, während die Doppelcurve ξ Puncte auf der schneidenden Ebene besitzen muss. Die fehlenden $\rho-4$ Puncte sind die Durchschnittspuncte der Geraden t mit der Schnittcurve. Eine beliebige Generatrix einer Developpablen ρ-ter Ordnung trifft also $\rho-4$ andere nicht unmittelbar folgende Erzeugende.

Ist die schneidende Ebene eine der Ebenen P des Systems, so ist der Schnitt aus einer Geraden t (der Berührungsgeneratrix der Ebene P und der Developpablen), die zweimal gezählt ist, und einer Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung zusammengesetzt. Durch einen beliebigen Punct der Ebene gehen weitere $\mu-1$ Ebenen des Systems, also ist die Schnittcurve von der $(\mu-1)$-ten Classe. Die Ebene osculiert die Cuspidalcurve und schneidet sie in weitern

$\nu-3$ Puncten; der Schnitt hat folglich $\nu+\theta-3$ Spitzen. Aus den Formeln von Plücker ergibt sich nun, dass diese Curve α Wendepuncte, $\gamma-\mu+2$ Doppeltangenten und $\xi-2\rho+8$ Doppelpuncte besitzt. In dem eben betrachteten Falle, ist der Punct $\mathfrak{m}$, in welchem die Ebnen P die Cuspidalcurve osculiert, kein Wendepunct der Schnittcurve mehr, sondern ein einfacher Berührungspunct mit der Geraden t, weil jetzt die Zahl $\mu-2$ der Tangenten, die von einem Puncte von t sich ausser t selbst an die Curve legen lassen, nur um eine einzige Einheit geringer ist als die Classe derselben. Die Schnittcurve hat $\xi-2\rho+8$ Doppelpuncte; die Durchschnittspuncte der Geraden t mit der Schnittcurve sind weitere $\rho-4$ Puncte der Doppelcurve, aber jeder von ihnen muss als zwei Doppelpuncte des Gesammtschnittes gezählt werden, weil dieser die Gerade t zweimal enthält. In diesen $\rho-4$ Puncten wird also die Doppelcurve von der Ebene P berührt. Das heisst auch, jede Ebene des Systems enthält $\rho-4$ Tangenten der Doppelcurve, und die Berührungspuncte liegen auf der Geraden des Systems, welche in dieser Ebene liegt. [1])

Die schneidende Ebene P sei eine der Wendeebenen des Systems. Dann repräsentiert die Gerade t im Schnitte drei zusammenfallende Gerade, wir haben also ausserdem eine Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung. Diese ist von der $(\mu-2)$-ten Classe, weil eine Wendeebene zwei unmittelbar folgende Ebenen des Systems ersetzt, und also durch jeden Punct derselben nur noch $\mu-2$ andere Ebenen hindurchgehen. Die Ebene P hat mit der Cuspidalcurve eine vierpunctige Berührung und schneidet sie daher in weiteren $\nu-4$ Puncten, das heisst die Schnittcurve hat $\nu+\theta-4$ Spitzen. Nach den Formeln von Plücker hat also die Curve $\alpha-1$ Wendepuncte, $\gamma-2\mu+6$ Doppeltangenten und $\xi-3\rho+13$ Doppelpuncte. Dieselbe Curve wird von der Geraden t, welche sie im Puncte $\mathfrak{m}$ berührt in weitern $\rho-5$ Puncten getroffen, von denen jeder dreimal unter den Doppelpuncten des Gesammtschnittes gezählt werden muss, weil die Gerade t als eine dreifache Gerade in diesem Schnitte gerechnet wird. Jede Wendeebene osculiert daher die Doppelcurve in $\rho-5$ Puncten, die auf der Geraden des Systems liegen, welche sich in jener Ebene befindet. Auch der Punct $\mathfrak{m}$ gehört der Doppelcurve an, da sich in ihm drei auf einander folgende Gerade des Systems schneiden, und also dieser Punct als Durchschnitt der ersten mit der dritten Tangente betrachtet in der Doppelcurve liegen muss. In diesem Puncte wird die Doppelcurve von der Ebene P berührt, wie man aus einer oben gemachten Bemerkung folgert. Die Puncte also, in welchen die Cuspidalcurve von den Wendeebenen berührt wird, gehören auch der Doppelcurve an, welche in ihnen von den nämlichen Ebenen berührt wird. [2])

---

[1]) Dies folgt auch aus der Bemerkung, dass die Doppelcurve in einem beliebigen ihrer Puncte diejenige Gerade als Tangente hat, welche den Durchschnitt der beiden Ebenen bildet, die in jenem Puncte die Developpable berühren. Daraus folgert sich ausserdem noch, dass die $\rho-4$ erwähnten Tangenten der Doppelcurve auch Tangenten der Schnittcurve $(\rho-2)$-ter Ordnung sind.

[2]) Es gibt noch andere gemeinschaftliche Puncte der Cuspidal- und der

In analoger Weise können wir die Charakteristiken der Perspectivkegel bestimmen oder sie aus dem Vorhergehenden mittelst des Princips der Dualität ableiten. Wir begnügen uns damit, die Resultate auszusprechen.

Wird der Scheitel auf einer Geraden des Systems genommen, so ist der Perspectivkegel von der ν-ten Ordnung, von der $(\rho-1)$-ten Classe, er hat $\mu+\theta-2$ Inflexionsgeneratrixen, $\beta+1$ Cuspidalgeneratrixen, $\eta-\rho+4$ Bitangentialebenen und $\vartheta-1$ Doppelgeneratrixen. Man sieht also, dass eine Tangente der gegebenen Raumcurve für denjenigen Perspectivkegel eine Cuspidalgeneratrix ist, der seinen Scheitel in einem Puncte dieser Geraden hat.

Wenn der Scheitel ein Punct des Systems ist, so hat der Perspectivkegel die Ordnungszahl $\nu-1$, er ist von der $(\rho-2)$-ten Classe, er besitzt ferner $\mu+\theta-3$ Inflexionsgeneratrixen, β Cuspidalgeneratrixen, $\eta-2\rho+8$ Bitangentialebenen und $\vartheta-\nu+2$ Doppelgeneratrixen. Es folgert sich hieraus, dass sich in jedem ganz beliebigen Puncte der gegebnen Raumcurve $\rho-4$ Generatrixen der doppeltberührenden Developpablen kreuzen, und dass die respectiven Tangentialebenen durch diejenige Gerade gehen, welche in jenem Puncte die gegebne Curve berührt. Diese $\rho-4$ Generatrixen liegen auch auf dem Perspectivkegel, dessen Scheitel der betrachtete Punct ist.

Ist der Scheitel ein Rückkehrpunct [1]) des Systems, so ist der Perspectivkegel von der $(\nu-2)$-ten Ordnung und der $(\rho-3)$-ten Classe, er hat ferner $\mu+\theta-4$ Inflexionsgeneratrixen, $\beta-1$ Cuspidalgeneratrixen, $\eta-3\rho+13$ Bitangentialebenen und $\vartheta-2\nu+6$ Doppelgeneratrixen. Man findet folglich, dass eine Spitze der gegebnen Raumcurve für die Rückkehrkante der doppeltberührenden Developpablen ein $(\rho-5)$-facher Punct ist, und dass die entsprechenden $\rho-5$ Tangentialebenen dieser Developpablen durch die Cuspidaltangente der gegebnen Curve gehen. Diese Developpable wird auch von den Osculationsebenen der gegebnen Curve in den Spitzen berührt.

14. Um ein Beispiel zu geben, denken wir uns eine Developpable μ-ter Classe gegeben, deren Tangentialebenen den Puncten einer Geraden a projectivisch entsprechen. Von welcher Ordnung ist dann diese abwickelbare Fläche? Nimmt man eine beliebige Gerade r, so gehen durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{w}$ derselben μ Tangentialebenen, denen auf a eine Gruppe von μ Puncten $\mathfrak{k}$ entspricht. Nehmen wir dagegen auf a einen Punct $\mathfrak{k}$, so ent-

Doppelcurve ausser den Puncten, in denen die erstere von den Wendeebenen berührt wird. Es sind nämlich die Spitzen der Cuspidalcurve ebenfalls in der Doppelcurve gelegen, weil in jeder derselben sich drei aufeinanderfolgende Gerade des Systems schneiden. Wenn ausserdem die Tangente in einem Puncte der Cuspidalcurve diese Curve noch in einem andern Puncte trifft, der nicht unmittelbar folgt, so ist dieser für die Doppelcurve eine Spitze, weil in ihm zwei unmittelbar folgende Gerade des Systems von einer dritten nicht benachbarten geschnitten werden.

[1]) Wäre der Scheitel ein ρ-facher Punct der Curve, so wäre der Perspectivkegel von der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung, weil jede Ebene durch diesen Punct die Curve nur noch in $\nu-\rho$ andern Puncten träfe.

spricht diesem eine Tangentialebene, die r in einem Puncte $\mathfrak{w}$ schneidet, und die andern $\mu-1$ Tangentialebenen, die durch $\mathfrak{w}$ gehen, bestimmen die andern $\mu-1$ Puncte der Gruppe auf a. Es folgt also, dass, wenn $\mathfrak{w}$ sich auf r bewegt, die Gruppe der Puncte $\mathfrak{t}$ auf a eine Involution μ-ten Grades erzeugt, die der einfachen von den Puncten $\mathfrak{w}$ gebildeten Punctreihe projectivisch ist. [1]) Diese Involution hat $2(\mu-1)$ Doppelpuncte, das heisst $2(\mu-1)$ Gruppen, deren jede zwei zusammenfallende Puncte $\mathfrak{t}$ besitzt. Jeder solchen Gruppe entspricht auf r ein Punct, in welchem zwei der μ Tangentialebenen zusammen fallen, das heisst ein Punct, der entweder einer Wendeebene oder dem Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen angehört, das heisst der Developpablen. Wir haben also, $\alpha=0, \theta=0$ vorausgesetzt,

$$\rho = 2(\mu-1),$$

und man zieht nun aus den Formeln von Cayley:

$$\left\{\begin{aligned} \nu &= 3(\mu-2),\\ \beta &= 4(\mu-3),\\ \gamma &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2},\\ \varepsilon &= \frac{9\mu^2-53\mu+80}{1.2},\\ \xi &= 2(\mu-2)(\mu-3),\\ \eta &= 2(\mu-1)(\mu-3), \ldots {}^{2)} \end{aligned}\right.$$

CAPITEL III.

OBERFLÄCHEN BELIEBIGER ORDNUNG.

15. Wir wollen eine beliebige *Oberfläche* als den Ort aller Lagen eines Punctes betrachten, der sich continuierlich im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass eine willkürliche Gerade ein System getrennter Lagen des Mobils enthält. [3])

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 21.

[2]) Salmon, *On the classification of curves of double curvature* (Cambridge and Dublin Math. Journal, T. 5; 1850). Man sehe ausserdem den ausgezeichneten *Treatise on the analytic geometry of three dimensions* (2d. ed. Dublin 1865) desselben Verfassers oder die deutsche Ausgabe, welche Prof. Fiedler davon gemacht hat mit reichen Zusätzen. (*Analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig 1863—65).

[3]) Das heisst in der Art, dass alle aufeinanderfolgende Lagen des sich bewegenden Punctes von der Variation zweier unabhängiger Parameter abhängen. Eine Oberfläche ist folglich eine *doppelt unendliche Reihe von Puncten.* Es folgt noch, dass die zwei Flächen gemeinschaftlichen Puncte eine einfach unendliche Reihe, das heisst eine Curve bilden (6).

Die Oberfläche heisst von der ν-ten Ordnung, wenn eine beliebige Gerade sie in ν (reellen, imaginären, verschiednen, zusammenfallenden) Puncten trifft. Hat folglich eine Gerade mehr als ν Puncte mit einer Fläche ν-ter Ordnung gemein, so liegt die Gerade vollständig auf der Fläche.

Eine Fläche erster Ordnung ist eine Ebene.

Eine Ebene schneidet eine Oberfläche ν-ter Ordnung in einer Curve ebenfalls von der ν-ten Ordnung.

Eine Gerade heisst *Tangente* einer Fläche, wenn sie dieselbe in zwei unendlich nahen Puncten trifft (zweipunctige Berührung), sie heisst eine *Osculierende*, wenn sie dieselbe in drei oder mehr unmittelbar folgenden Puncten schneidet (dreipunctige, . . . Berührung).

16. Durch einen Punct $\mathfrak{m}$ einer gegebenen Oberfläche ziehe man zwei Gerade r, r', die in ihm die Fläche berühren mögen. Die Ebene rr' schneidet die Fläche in einer Curve l die in $\mathfrak{m}$ eine doppelte Berührung sowohl mit r als mit r' hat. Es ist folglich $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct für die Curve l [1]). Alle Geraden also, die in der Ebene rr' durch $\mathfrak{m}$ gezogen werden können, haben in diesem Puncte eine zweipunctige Berührung mit l, das heisst, sie sind Tangenten der Fläche. Unter ihnen gibt es nur zwei, die Tangenten an die beiden Zweige von l, welche in $\mathfrak{m}$ eine dreipunctige Berührung mit l eingehen und also auch mit der Fläche. Wir nennen sie die *Osculierenden* im Puncte $\mathfrak{m}$. [2]) Jede Ebene, die durch eine dieser Geraden gelegt ist, schneidet die Fläche in einer Curve, die in $\mathfrak{m}$ eine dreipunctige Berührung mit dieser Geraden hat, das will sagen, in einer Curve, für welche $\mathfrak{m}$ ein Wendepunct und die Gerade eine Wendetangente ist.

Die beiden Osculierenden sind reell oder imaginär, jenachdem $\mathfrak{m}$ für l ein wirklicher Knotenpunct oder ein conjugierter Punct ist. Im ersten Falle heisst $\mathfrak{m}$ ein *hyperbolischer Punct*, im zweiten Falle ein *elliptischer*. Ist $\mathfrak{m}$ eine Spitze für die Curve l, so fallen die beiden Osculierenden in eine einzige Gerade zusammen, und $\mathfrak{m}$ heisst ein *parabolischer Punct*. [3])

Im Allgemeinen liegen alle Tangenten der Oberfläche im Puncte $\mathfrak{m}$ in der Ebene rr', das heisst, eine durch $\mathfrak{m}$ ausserhalb dieser Ebene gelegte Gerade hat dort im Allgemeinen nur einen einzigen Punct mit der Fläche gemein. [4]) Verhielte es sich aber mit einer so gezogenen Geraden r'' anders, so hätte dies für jede andere Gerade r''' ebenfalls statt, die durch $\mathfrak{m}$ geht. In der That, hat r'' in $\mathfrak{m}$ einen zweipunctigen Contact mit der Fläche, so schneidet die Ebene $r''r'''$ die Fläche in einer Curve, welche in $\mathfrak{m}$ von r'' berührt wird und auch von der Durchschnittsgeraden der beiden Ebenen

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 31.

[2]) *Inflexional tangents* nach Salmon, *Haupttangenten* nach Clebsch. Enthält die Fläche eine Gerade, so ist diese eine Osculierende für jeden ihrer Puncte.

[3]) In einer Developpablen, die Kegel eingeschlossen, sind alle Puncte parabolisch. Die Osculierenden fallen mit den Erzeugenden zusammen.

[4]) Dupin, *Développement de géométrie*, Paris 1813, p. 59.

$r''r'''$ und rr', also auch durch r'''. Unter dieser Voraussetzung haben also alle durch $\mathfrak{m}$ gelegte Geraden in ihm einen zweipunctigen Contact mit der Fläche, und alle Ebenen durch $\mathfrak{m}$ schneiden die Fläche in Curven, die in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct haben. Diese Sache findet aber nur in singulären Puncten der Fläche statt.

Die Ebene rr', in der alle Gerade, welche die Oberfläche in einem *gewöhnlichen Puncte* $\mathfrak{m}$ berühren, enthalten sind, heisst die *Tangentialebene der Fläche* in $\mathfrak{m}$. Eine Tangentialebene in einem beliebigen Punct einer Fläche schneidet daher diese in einer Curve, die zwei reelle oder imaginäre Zweige besitzt, welche sich im Berührungspuncte durchkreuzen.[1])

Mann kann auch sagen, dass die Tangentialebene der Fläche in $\mathfrak{m}$ der Ort der Geraden ist, welche in ihm die auf der Fläche gezogenen Linien berühren.

Classe der Oberfläche nennen wir die Zahl der Tangentialebenen, die man durch eine beliebige im Raum gegebene Gerade legen kann.

17. Wenn drei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, und damit auch alle Geraden durch $\mathfrak{m}$, dort die Fläche in zwei zusammenfallenden Puncten treffen, so heisst $\mathfrak{m}$ ein *Doppelpunct* für diese Fläche. Jede durch ihn gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, für welche er ein Doppelpunct ist; die Tangenten an die beiden Zweige haben mit der Curve eine dreipunctige Berührung. Es gibt daher eine unbegrenzte Zahl von Geraden, die im Doppelpuncte $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit der Fläche haben, und der Ort derselben ist ein Kegel zweiter Ordnung (1). Jede Tangentialebene dieses Kegels schneidet die gegebene Fläche in einer Curve, für welche $\mathfrak{m}$ eine Spitze bildet. Wir werden im Folgenden zeigen, dass es sechs Erzeugende dieses Kegels gibt, von denen jede in $\mathfrak{m}$ eine vierpunctige Berührung mit der Fläche hat.

Es kann sich ereignen, dass der Kegel sich in zwei Ebenen P, Q auflöst. In diesem Falle sind die Osculierenden diejenigen Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen und in P oder Q liegen. Die Ebenen, welche durch die Gerade PQ gehen, schneiden die Fläche in Curven, für welche $\mathfrak{m}$ eine Spitze ist. Der Schnitt, den jede der Ebenen P, Q macht, ist eine Curve mit einem dreifachen Puncte in $\mathfrak{m}$. Dies ist sogleich klar, wenn man beachtet, dass jede Gerade, die durch $\mathfrak{m}$ geht und in einer dieser Ebenen liegt, die Oberfläche und folglich auch die Curve in drei Puncten schneidet, die sämmtlich mit $\mathfrak{m}$ zusammenfallen. Die Tangenten an die drei Zweige sind ebensoviele Gerade, die in $\mathfrak{m}$ mit der Fläche einen vierpunctigen Contact besitzen.

Es kann ferner vorkommen, dass die Ebenen P, Q in eine einzige zusammenfallen, die dann die einzige ist, welche die Fläche in einer Curve

---

[1]) Plücker, *Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.* (Crelles Journal, Bd. 4; 1829. S. 359).

mit dreifachem Puncte $\mathfrak{m}$ schneidet. Jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ gibt in diesem Falle eine Curve mit einer Spitze in diesem Puncte.

Um diese drei Arten von Doppelpuncten zu unterscheiden, pflegt man sie *conischen Punct*, *Biplanarpunct*, *Uniplanarpunct* zu nennen.[1])

Man kann noch weitere Verschiedenheiten des Biplanarpunctes unterscheiden, je nachdem eine oder zwei oder drei Gerade, die einen vierpunctigen Contact mit der Fläche haben, mit der Durchschnittsgeraden der beiden Tangentialebenen zusammenfallen; und ebenso des Uniplanarpunctes, je nachdem die drei Geraden mit vierpunctigem Contact verschieden sind oder zusammenfallen.[2])

18. Eine Fläche kann auch *dreifache*, *vierfache*, . . . , *beliebig vielfache* Puncte haben. Ein Punct $\mathfrak{m}$ heisst ρ-fach, wenn eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Gerade in ihm die Fläche in ρ zusammenfallenden Puncten schneidet. Jede durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene schneidet dann die Fläche in einer Curve mit einem ρ-fachen Punct in $\mathfrak{m}$, und die Tangenten an die ρ Zweige haben dort eine $(\rho+1)$-punctige Berührung mit der Fläche. Es gibt folglich eine unbegrenzte Zahl von Geraden, die mit der Fläche eine $(\rho+1)$-punctige Berührung in $\mathfrak{m}$ haben, und der Ort derselben ist ein Kegel ρ-ter Ordnung. Wir werden später zeigen, dass $\rho(\rho+1)$ Erzeugende dieses Kegels mit der Fläche eine $(\rho+2)$-punctige Berührung haben. Der Kegel kann in gewissen Fällen in Kegel niederer Ordnung zerfallen oder auch in ρ Ebenen, die noch von einander verschieden sein können, oder zum Theil oder sämmtlich zusammenfallen, und so vielerlei Arten von ρ-fachen Puncten Entstehung geben.

Eine Fläche kann aber niemals einen vielfachen Punct haben, dessen Grad der Multiplicität die Ordnung derselben übersteigt, denn in solchem Falle würde jede Gerade, die durch diesen Punct ginge, mehr Puncte mit der Fläche gemein haben, als deren Ordnungszahl zulässt, das heisst, sie würde vollständig auf der Fläche liegen.

Hat eine Oberfläche ν-ter Ordnung einen ν-fachen Punct $\mathfrak{o}$, so ist sie nothwendigerweise ein Kegel mit dem Scheitel in $\mathfrak{o}$. Denn es würde jede Gerade, welche $\mathfrak{o}$ mit einem andern Puncte der Fläche verbindet, vollständig auf derselben liegen, da sie $\nu+1$ Puncte mit derselben gemein hat.[3])

---

[1]) Der Scheitel eines Kegels zweiter Ordnung, ein beliebiger Punct der Doppelcurve und ein beliebiger Punct der Cuspidalcurve einer Developpablen sind Beispiele dieser drei Arten von Doppelpuncten.

[2]) Schlaefli, *On the distribution of surfaces of the third order into species* (Philosophical Transactions, 1863) p. 198.

[3]) Welche Zahl von Bedingungen bestimmt eine Oberfläche ν-ter Ordnung? Es sei $\xi_{\rho-1}$ die Zahl der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Fläche einen $(\rho-1)$-fachen Punct $\mathfrak{m}$ hat. Die Geraden, die in $\mathfrak{m}$ einen ρ-fachen Contact haben, bilden dann einen Kegel $(\rho-1)$-ter Ordnung, der durch $\frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2}$ Erzeugende individualisiert wird. Wenn man folglich festsetzt, die Oberfläche solle

Eine Oberfläche kann auch vielfache Linien haben, das heisst Linien, von denen alle Puncte vielfache Puncte der Fläche sind.[1]) So haben wir zum Beispiel schon gesehen, dass eine Developpable im Allgemeinen eine Doppelcurve und eine Cuspidalcurve hat. Besitzt eine Fläche eine ρ-fache Curve ν-ter Ordnung und eine Cuspidalcurve ν'-ter Ordnung, so hat der Schnitt, den eine beliebige Ebene auf der Fläche bewirkt, eine Zahl von ν ρ-fachen Puncten und ν' Spitzen. Eine Fläche ν-ter Ordnung, die nicht der Complex mehrerer Oberflächen niederer Ordnung ist, kann keine Doppelcurve besitzen, deren Ordnungszahl grösser wäre als $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}$, da eine ebene Curve nicht mehr als diese Zahl von Doppelpuncten haben kann, ohne in Curven niederer Ordnung zu zerfallen.[2])

---

in $\mathfrak{m}$ mit $\frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2}+1$ beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegten Geraden, die nicht auf einem Kegel $(\rho-1)$-ter Ordnung liegen, eine ρ-punctige Berührung haben, so wird $\mathfrak{m}$ ein ρ-facher Punct. Daraus folgt, dass $\xi_\rho=\xi_{\rho-1}+\frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2}+1$, oder $\xi_\rho=\frac{\rho(\rho+1)(\rho+2)}{1.2.3}$ ist. Hat aber eine Fläche ν-ter Ordnung einen ν-fachen Punct, so ist sie ein Kegel, der, sobald der Scheitel gegeben ist, durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Bedingungen bestimmt ist. Daher ist die Zahl der Bedingungen, die eine Fläche ν-ter Ordnung bestimmen:

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}+\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}=\frac{\nu(\nu^2+6\nu+11)}{1.2.3}=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1.2.3}-1.$$

Diese Zahl bezeichnen wir im Folgenden durch das Symbol $\mathfrak{N}(\nu)$. In der That ist $\mathfrak{N}(\nu)+1$ genau die Zahl der Coefficienten in einem vollständigen Polynom ν-ten Grades zwischen drei Variablen.

[1]) Eine Curve ist ρ-fach, wenn sich in derselben ρ Schalen der Oberfläche schneiden, und diese hat folglich in jedem Puncte der ρ-fachen Linie ρ Tangentialebenen, das heisst, der Ort der Geraden, welche in diesem Puncte einen $(\rho+1)$-fachen Contact mit der Fläche haben, ist aus ρ Ebenen gebildet. Hat also eine Fläche ν-ter Ordnung z. B. eine Doppelgerade r, so ist jeder Punct derselben ein Biplanarpunct. Eine beliebig durch r gelegte Ebene P schneidet nämlich die Fläche in einer Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, die $(\nu-2)$ Puncte mit r gemein hat. Es sei $\mathfrak{a}$ einer dieser Puncte. Jede Gerade durch $\mathfrak{a}$ in der Ebene P gezogen hat dort drei zusammenfallende Puncte mit der Fläche gemein, folglich zerfällt der Osculationskegel in $\mathfrak{a}$ in zwei Ebenen, deren eine P ist. Legen wir nun durch $\mathfrak{a}$ eine beliebige Ebene E, so schneidet diese die Fläche in einer Curve mit Doppelpunct in $\mathfrak{a}$; eine der respectiven Tangenten ist die Gerade PE, die andere bestimmt sich als Durchschnitt von E und der zweiten Tangentialebene P' der Oberfläche in $\mathfrak{a}$. Die Ebenen P, P' sind derart verbunden, dass jeder Lage der einen $\nu-2$ Lagen der andern entsprechen, folglich finden $2(\nu-2)$ Lagen statt, für welche P, P' zusammenfallen (*Einleitung*, Nr. 83), es gibt also $2(\nu-2)$ Uniplanarpuncte auf der Doppelgeraden r.

[2]) *Einleitung*, Nr. 35.

Hat ein Kegel ausser seinem Scheitel $\mathfrak{o}$ noch einen andern ρ-fachen Punct $\mathfrak{d}$, so ist die Gerade $\mathfrak{od}$ eine ρ-fache Gerade. Dies ist augenscheinlich, wenn man beachtet, dass der durch eine Ebene, die beliebig durch $\mathfrak{od}$ gelegt ist, entstehende Schnitt in $\mathfrak{d}$ einen ρ-fachen Punct haben muss, und dass ausserdem der Kegel aus Geraden besteht, die sämmtlich in $\mathfrak{o}$ zusammenlaufen, dass also ρ dieser Geraden mit $\mathfrak{od}$ zusammenfallen.

19. Wir haben gesehen, dass die Tangentialebene einer Fläche in einem gewöhnlichen Puncte derselben die Fläche in einer Curve schneidet, für welche der Berührungspunct ein Doppelpunct ist. Schneidet umgekehrt eine Ebene die Fläche in einer Curve mit Doppelpunct in $\mathfrak{m}$, und ist dieser kein Doppelpunct der Fläche [1]), so berührt die Ebene die Fläche in $\mathfrak{m}$, weil alle Geraden, die in der Ebene durch $\mathfrak{m}$ gehen, dort einen zweipunctigen Contact mit der Curve also auch mit der Fläche haben.

Aber es besteht ein weit allgemeineres Theorem. Haben zwei beliebige Flächen einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{m}$ und in ihm dieselbe Tangentialebene, das heisst, *berühren sich die beiden Flächen im Puncte* $\mathfrak{m}$, so schneidet jede Ebene, die durch diesen Punct geht, die beiden Flächen in zwei Linien, die sich in $\mathfrak{m}$ berühren; diese Ebene hat also in $\mathfrak{m}$ mit der Durchschnittscurve der beiden Flächen eine zweipunctige Berührung, das heisst soviel, als, die Curve hat in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct [2]). Die gemeinschaftliche Tangentialebene schneidet beide Flächen in Curven, die in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct besitzen, und hat folglich dort eine vierpunctige Berührung mit der Durchschnittscurve beider Flächen. In dieser Ebene liegen die Tangenten an die beiden Zweige der Curve, und diese beiden Geraden haben jede, wenn man durch sie eine schneidende Ebene legt, mit der Schnittcurve eine dreipunctige Berührung in $\mathfrak{m}$, das heisst, die Schnitte der beiden Flächen osculieren sich in diesem Puncte. Fallen beide Tangenten zusammen, das heisst, hat die Curve im Puncte $\mathfrak{m}$ eine Spitze, so sagt man, die beiden Flächen haben eine *stationäre Berührung*.

Gäbe es in der Tangentialebene durch $\mathfrak{m}$ noch eine dritte Gerade, so dass die durch selbe gelegten Ebenen die beiden Flächen in Curven schnitten, die sich osculierten, so hätte die Schnittcurve beider Flächen in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct, folglich hätte jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ in ihm einen dreipunctigen Contact mit der Curve, dass heisst, sie schnitte die beiden Flächen in

---

[1]) So schneidet zum Beispiel eine Ebene, die durch eine Generatrix einer Developpablen ρ-ter Ordnung geht, diese Fläche in der Erzeugenden und einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung, welche von der Geraden in einem Puncte osculiert wird und in $\rho-4$ andern Puncten geschnitten. Aber diese Puncte sind keine wirklichen Berührungspuncte. Der erste gehört der Cuspidalcurve, die andern der Doppelcurve an.

[2]) Hat umgekehrt die gemeinschaftliche Curve zweier Flächen einen Doppelpunct, der weder für die eine noch die andere Fläche ein Doppelpunct ist, so berühren sich die beiden Oberflächen in diesem Puncte.

Curven, die sich osculieren. In diesem Falle sagt man, *die beiden Flächen osculieren sich* in $\mathfrak{m}$. [1]) Sie haben in $\mathfrak{m}$ die beiden Osculierenden gemein, und die Tangentialebene hat in diesem Puncte, da sie beide Flächen in Curven mit Doppelpunct in $\mathfrak{m}$ und denselben Tangenten in diesem Puncte schneidet, einen sechspunctigen Contact mit der Durchschnittscurve beider Flächen. Die Tangenten an die drei Zweige dieser Curve sind die Geraden, durch welche die Ebenen gehen, welche die Flächen in Curven mit vierpunctigem Contact in $\mathfrak{m}$ schneiden.

20. Zwei Flächen von den Ordnungen ν,ν' werden von einer willkürlichen Ebene in zwei Curven geschnitten, welche $\nu\nu'$ Puncte gemein haben. Beide Flächen schneiden sich also in einer Curve $\nu\nu'$-ter Ordnung. [2]) Da die

---

[1]) Im Allgemeinen sagt man, zwei Flächen haben in einem Puncte $\mathfrak{m}$ einen Contact der Ordnung ρ, wenn eine willkürliche Ebene, die durch $\mathfrak{m}$ geht, dieselbe in zwei Curven schneidet, die dort eine $(\rho+1)$-punctige Berührung haben. Die Durchschnittscurve beider Flächen hat dann in $\mathfrak{m}$ einen $(\rho+1)$-fachen Punct (Plücker, *a. a. O.* S. 351.) Man sieht leicht, dass, wenn eine Fläche mit einer andern gegebenen Fläche eine Berührung ρ-ter Ordnung in einem ebenfalls gegebenen Puncte eingehen soll, dies dasselbe ist, als ob sie durch $\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{1.2}$ (hier unendlich nahe) Puncte gehen müsste.

[2]) Durch die Curve der Ordnung ν^2, Durchschnitt zweier Flächen ν-ter Ordnung, geht eine unbegrenzte Zahl anderer Flächen derselben Ordnung. Dies beweist man, indem man beachtet, dass entweder die gleiche Eigenschaft für die Curve Platz greift, die aus dem Durchschnitt beider Flächen durch eine beliebige Ebene entsteht, oder auch, dass, wenn $U=0$, $V=0$ die Gleichungen dieser Flächen sind, die Gleichung $U+\lambda V=0$ für jeden Werth des Parameters λ eine Fläche repräsentiert, welche durch sämmtliche gemeinschaftliche Puncte der beiden gegebenen hindurchgeht.

Wir haben anderwärts (18) bewiesen, dass eine Fläche ν-ter Ordnung durch $\mathfrak{N}(\nu)$ Bedingungen gegeben ist. Durch $\mathfrak{N}(\nu)$ beliebig im Raume gegebene Puncte geht also eine Fläche ν-ter Ordnung, aber auch nur eine einzige, weil, sobald durch diese Puncte zwei Flächen dieser Ordnung gingen, in Gemäss der eben bemerkten Eigenschaft, sich eine unbegrenzte Zahl anderer ebenfalls durch dieselben beschreiben liessen.

Durch $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gegebene Puncte lässt sich eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν-ter Ordnung legen, von denen zwei sich in einer Curve ν^2-ter Ordnung schneiden, die durch alle jene Puncte geht. Durch diese Curve gehen unzählig viele andere Flächen derselben Ordnung, nämlich die, welche die gegebenen Puncte enthalten. Also haben wir den Satz:

Alle Flächen ν-ter Ordnung, welche durch $\mathfrak{N}(\nu)-1$ beliebig gegebene Puncte gehen, schneiden sich auf einer und derselben Curve ν^2-ter Ordnung,

oder auch: $\mathfrak{N}(\nu)-1$ beliebig gegebene Puncte bestimmen eine Curve der ν^2-ten Ordnung, durch die eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν-ter Ordnung geht. Plücker, *Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés* (Annales de Mathématiques par Gergonne, T. 19; 1828—1829).

Der Complex aller Flächen ν-ter Ordnung, die durch dieselbe Curve ν^2-ter

Tangente dieser Curve in einem beliebigen ihrer Puncte dort beide Flächen berühren muss, so ist sie der Durchschnitt der Ebenen, welche in demselben Puncte beide Flächen berühren. Die Doppelpuncte der Curve sind, wenn sie nicht Doppelpuncte für eine der beiden Flächen sind, Berührungspuncte derselben. Schneiden sich die Flächen in zwei getrennten Curven, so ist jeder gemeinschaftliche Punct dieser Curven ein Berührungspunct der Flächen.

Ist ein gemeinschaftlicher Punct zweier Flächen für die erste ein ρ-facher für die zweite ein ρ'-facher Punct, so ist er für die beiden Flächen gemein-

---

Ordnung gehen, heisst ein *Flächenbüschel ν-ter Ordnung.* Durch einen beliebig im Raum gegebenen Punct geht nur eine Fläche des Büschels. Ist umgekehrt ein Complex von Flächen ν-ter Ordnung $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen und so beschaffen, dass durch einen willkürlichen Punct des Raumes nur eine Fläche geht, so ist die Curve, die zweien von ihnen gemein ist, allen gemein, und der Complex bildet ein Büschel. Die Tangente der *Basis-Curve,* gemeinschaftliche Curve aller Flächen des Büschels, in einem beliebigen ihrer Puncte liegt in der Tangentialebene jeder Oberfläche des Büschels; also gehen die Ebenen, welche die Flächen eines Büschels in demselben Puncte $\mathfrak{t}$ der Basis-Curve berühren, durch ein und dieselbe Gerade t, das heisst, sie bilden ein Ebenenbüschel. Jeder Fläche des Büschels entspricht eine Tangentialebene, ebenso entspricht umgekehrt jeder Ebene durch t eine Fläche des Büschels, nämlich diejenige Fläche, welche durch einen Punct der Ebene geht, der unmittelbar benachbart $\mathfrak{t}$ ist, aber ausserhalb t liegt. Wir sagen deshalb, das Flächenbüschel und das Büschel der Tangentialebenen sind projectivisch, und wir verstehen unter *Doppelverhältniss von vier Flächen des Büschels* das Doppelverhältniss der vier entsprechenden Tangentialebenen in einem beliebigen Puncte der Basiscurve. Zwei Flächenbüschel kann man *projectivisch* nennen, wenn das Büschel der Tangentialebenen in einem Puncte der Basiscurve des ersten Büschels dem Büschel der Tangentialebenen in einem Puncte der Basiscurve des zweiten Büschels projectivisch ist, oder auch, wenn die Flächen des ersten Büschels eindeutig den Flächen des andern Büschels entsprechen.

Ein Flächenbüschel wird offenbar durch eine Ebene in Curven geschnitten, die ein Büschel bilden.

Man kann ferner leicht die Zahl der Puncte finden, welche die Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung bestimmen, die den Durchschnitt zweier Flächen der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung bildet, $\nu_1 > \nu_2$ vorausgesetzt. Die beiden Flächen seien F_1, F_2 und es sei F eine beliebige Fläche von der Ordnung $\nu_1-\nu_2$. Die Curve ν_1^2-ter Ordnung in welcher die Fläche F_1 das System der Flächen $F_2 F$ schneidet, ist die Basis eines Büschels ν_1-ter Ordnung, man kann also durch sie und durch einen andern beliebig im Raume gewählten Punct eine neue Fläche ν_1-ter Ordnung legen. F kann aber, da sie ganz willkürlich ist, $\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)$ Bedingungen genügen, folglich kann man durch die Curve $F_1 F_2$ und durch $\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)+1$ Puncte eine Fläche ν_1-ter Ordnung legen. Aber eine Fläche dieser Ordnung ist durch $\mathfrak{N}(\nu_1)$ Bedingungen gegeben, folglich enthalten alle Flächen ν_1-ter Ordnung, die durch $\mathfrak{N}(\nu_1)-\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)-1$ beliebige Puncte der Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gehen, diese vollständig. Diese Curve ist also durch obige Zahl von Bedingungen gegeben. Jacobi, *De relatio-*

schaftliche Curve ein $\rho\rho'$-facher Punct. Denn eine beliebig durch ihn gelegte Ebene schneidet beide Flächen längs zweier Curven, die in diesem Puncte bezüglich ρ und ρ' sich kreuzende Zweige besitzen und also dort $\rho\rho'$ zusammenfallenden Puncten haben. Wäre der gemeinschaftliche Punct für beide Flächen ein ρ-facher Punct, und hätten beide daselbst den nämlichen Osculationskegel, das ist den Ort der Geraden, welche dort die Fläche in $\rho+1$ unmittelbar folgenden Puncten treffen, so hätten beide Schnittlinien den ρ-fachen Punct und die ρ Tangenten gemein also auch $\rho^2+\rho$ zusammenfallende gemeinsame Puncte; es wäre folglich dieser Punct für die beiden Flächen gemeinsame Curve ein $\rho(\rho+1)$-facher Punct.

Wenn zwei Flächen sich berühren, sich osculieren, . . . längs einer Curve, das heisst in allen Puncten einer Curve, so muss diese zweimal, dreimal, . . . bei den vollständigen Durchschnitt gezählt werden. Das ist klar, wenn man beachtet, dass eine beliebige Transversalebene beide Flächen in Curven schneidet, die unter sich soviele zweipunctige, dreipunctige, . . . Contacte haben, als die Ordnung dieser Curve gross ist.

Ist eine Curve für eine Fläche eine ρ-fache Curve und für eine andere Fläche ρ'-fach, so muss man sie bei der Durchschnittscurve beider Flächen $\rho\rho'$-mal zählen.

21. Nimmt man als für sich klar an, dass die Zahl der Puncte, in denen eine Curve ν-ter Ordnung von einer Fläche ν'-ter Ordnung geschnitten wird, nur von den Zahlen ν und ν' abhängt, so kann man schliessen, dass die Fläche die Curve in $\nu\nu'$ Puncten schneidet, weil dies die Zahl der Durchschnittspuncte wäre, im Falle die zweite Oberfläche aus ν' Ebenen zusammengesetzt wäre. Es folgt daraus, dass, wenn eine Curve ν-ter Ordnung mehr als $\nu\nu'$ Puncte mit einer Fläche ν'-ter Ordnung gemein hat, dieselbe vollständig auf der Fläche liegt.

Ist ein Punct für die Curve ρ-fach, für die Fläche ρ'-fach, so zählt er für $\rho\rho'$ Durchschnittspuncte. So trifft zum Beispiel ein Kegel ρ'-ter Ordnung, dessen Scheitel in einem ρ-fachen Punct einer Curve ν-ter Ordnung liegt, diese letztere in noch weiteren $\nu\rho'-\rho\rho'$ Puncten. Der Perspectivkegel der Curve nämlich, der seinen Scheitel in diesem Puncte hat (13), ist von der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung und schneidet folglich den ersten Kegel längs $\rho'(\nu-\rho)$ Generatrixen.

---

nibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis etc. (Crelles Journal, Bd. 15; 1836).

So ist zum Beispiel eine ebene Curve ν-ter Ordnung durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Puncte bestimmt; die Durchschnittscurve einer Quadrifläche mit einer Fläche ν-ter Ordnung ist bestimmt durch $\nu(\nu+2)$ Puncte; die Durchschnittscurve einer cubischen Fläche, das heisst einer Fläche dritter Ordnung, mit einer Fläche ν-ter Ordnung ist bestimmt durch $\frac{3\nu(\nu+1)}{1.2}$ Puncte; u. s. w.

Man sagt *eine Curve und eine Fläche haben einen zweipunctigen Contact*, wenn sie zwei unendlich nahe Puncte gemein haben, das heisst, wenn eine Gerade sie beide in demselben Puncte zweipunctig berührt; sie haben ferner *einen dreipunctigen Contact*, wenn sie drei unendlich nahe Puncte gemein haben, das heisst, wenn eine Ebene die Curve in demselben Puncte osculiert, in dem sie die Fläche berührt; u. s. w.

Der Durchschnitt zweier Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung ist eine Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, welche mit einer Fläche ν_3-ter Ordnung $\nu_1\nu_2\nu_3$ Puncte gemein hat. Drei Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 haben daher $\nu_1\nu_2\nu_3$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte. [1])

Hätten drei Flächen einen gemeinschaftlichen Berührungspunct, so zählte dieser als *vier* Durchschnittspuncte. Denn die Curve, die den beiden ersten Flächen gemein ist, hat mit der gemeinschaftlichen Tangentialebene und also auch mit der dritten Fläche eine vierpunctige Berührung.

22. Zwei Flächen ν-ter und ν'-ter Ordnung mögen eine Berührung $(\rho-1)$-ter Ordnung längs einer Curve μ-ter Ordnung haben, dann schneiden sie sich ausserdem noch in einer Curve $(\nu\nu'-\rho\mu)$-ter Ordnung. Eine Fläche der ν''-ten Ordnung, die mit der ersten Curve im Puncte $\mathfrak{o}$ eine σ-punctige Berührung hat, schneidet diese in andern $\nu''\mu-\sigma$ Puncten, und trifft die zweite Curve in $\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)$ Puncten. Folglich haben die beiden Curven, in denen die dritte Fläche die beiden ersten schneidet, $\nu''\mu-\sigma$ ρ-punctige Contacte und $\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)$ einfache Durchschnittspuncte. Da nun die gemeinschaftlichen Puncte dieser Curven diejenigen sind, in welchen sich die drei Flächen schneiden, so haben die Curven

$$\nu\nu'\nu''-\rho(\nu''\mu-\sigma)-\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)=\rho\sigma$$

aufeinanderfallende Durchschnittspuncte in $\mathfrak{o}$: das heisst die beiden Curven haben in $\mathfrak{o}$ einen $\rho\sigma$-punctigen Contact. [2])

Der Satz lässt sich nicht anwenden, wenn $\mu=1$ und $\nu''=1$ ist. Eine Developpable ν-ter Ordnung wird zum Beispiel von einer ihrer Tangentialebenen längs einer Generatrix berührt und von derselben in einer Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung geschnitten, welche die Generatrix in einem Puncte $\mathfrak{o}$ berührt und sie in andern $\nu-4$ Puncten schneidet. Eine andere Ebene, die auch durch die Generatrix geht, schneidet die abwickelbare Fläche in einer Curve der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die in $\mathfrak{o}$ mit der Generatrix $\nu-1-(\nu-4)$ Puncte gemein hat, das heisst, diese Curve wird durch die Generatrix osculiert, wie wir schon anderweitig gesehen haben (13).

---

1) Dies entspricht dem analytischen Factum, dass drei algebraischen Gleichungen des ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Grades zwischen drei Variablen gleichzeitig durch $\nu_1\nu_2\nu_3$ Systeme von Werthen dieser Unbekannten genügt wird.

2) Dupin, *Développements*, p. 231.

CAPITEL IV.

OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

23. Eine Fläche heisst von der zweiten Ordnung, oder eine *Quadrifläche* (15), wenn eine beliebige Gerade sie in zwei (reellen, imaginären, getrennten, zusammenfallenden) Puncten trifft, oder auch, wenn eine beliebige Ebene sie in einem Kegelschnitt oder einer Linie zweiter Ordnung (die reell oder imaginär sein kann) schneidet.

Hat eine Gerade mit der Fläche drei Puncte gemein, so liegt sie vollständig auf derselben, und eine Fläche enthält also die beiden Geraden vollständig, welche sie in einem beliebigen Puncte $\mathfrak{m}$ (16) osculieren. Diese Geraden bilden den Durchschnitt der Fläche mit der Tangentialebene in $\mathfrak{m}$, da eine Curve zweiter Ordnung mit einem Doppelpunct sich nothwendigerweise in zwei (reelle, imaginäre, getrennte, zusammenfallende) Gerade g, g' auflöst.

Wir nehmen zuerst an, die Geraden g, g' fielen zusammen. In diesem Falle berührt die Ebene die Fläche in allen Puncten der Gerade g. Eine andere durch g gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer neuen Geraden, welche die erste in einem Puncte $\mathfrak{d}$ schneidet, der für die Fläche ein Doppelpunct ist, da diese in ihm von beiden Ebenen berührt wird (17). Aber eine Fläche zweiter Ordnung mit einem Doppelpunct ist ein Kegel mit dem Scheitel in diesem Puncte (18), und es fallen daher in jedem Puncte $\mathfrak{m}$ die beiden Geraden g, g' in eine einzige zusammen. Hieraus folgert sich: Hat eine Quadrifläche einen parabolischen Punct, so sind alle andern Puncte derselben ebenfalls parabolische Puncte, und die Fläche ist ein Kegel.

24. Es seien jetzt die Geraden g, g', die dem Puncte $\mathfrak{m}$ zugehören, beide reell und von einander verschieden. Eine Ebene, welche durch g gelegt ist und durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{n}$ der Fläche, schneidet diese längs einer neuen Geraden h', die durch $\mathfrak{n}$ geht; und die Tangentialebene in $\mathfrak{n}$, die schon die Gerade h' enthält, enthält ausserdem noch eine zweite Gerade h, die durch $\mathfrak{n}$ geht und auf der Fläche liegt. Hat folglich eine Quadrifläche einen hyperbolischen Punct, so sind ihre sämmtlichen Puncte hyperbolisch. Wenn daher eine Quadrifläche eine reelle Gerade enthält, so liegen auf ihr auch noch eine unbegrenzte Zahl anderer und, den Fall ausgenommen, dass die Fläche ein Kegel ist, gehen durch jeden Punct derselben zwei Gerade.

Lassen wir, wie früher, um die Gerade g eine Ebene rotieren, so haben wir für jede Lage dieser Ebene eine Gerade h', die g in einem Puncte trifft, in welchem die Ebene die Fläche berührt. Dieser Punct ist für zwei Lagen der Ebene nicht mehr derselbe, also auch nicht für zwei Gerade h', weil die Fläche, da sie kein Kegel ist, nicht drei Gerade zulässt, welche

auf ihr liegen und in demselben Puncte zusammen laufen. Daraus, dass zwei Gerade h' die Gerade g in verschiedenen Puncten treffen, folgt, dass sie niemals in dieselbe Ebene fallen können. Wir sagen, dass alle diese Geraden h', zu denen auch g' gehört, *ein System geradliniger Generatrixen* der Fläche bilden.

Lassen wir jetzt ebenso eine Ebene um g' rotieren, so erhalten wir analog *ein anderes System geradliniger Generatrixen* derselben Fläche, die ebenfalls zu zwei und zwei nicht mehr in derselben Ebene liegen und die sämmtlich von den Erzeugenden des ersten Systems verschieden sind, weil sie sämmtlich g' schneiden. Unter diesen neuen Geraden befindet sich auch g.

Auf diese Weise enthält die Fläche zwei Systeme von Geraden.[1]) Durch jeden Punct der Fläche geht eine Gerade des einen und eine Gerade des andern Systems, und es enthält also jede Tangentialebene eine Gerade aus jedem Systeme. Der Durchschnittspunct zweier Geraden aus verschiedenen Systemen ist der Punct, in welchem die Fläche von der Ebene berührt wird, welche die beiden Geraden enthält. Zwei Gerade desselben Systemes liegen nicht in derselben Ebene, aber jede Gerade des einen Systems schneidet alle Geraden des andern.

Um Confusion in der Sprache zu vermeiden, ist es gut, die Geraden des einen Systems *Generatrixen*, die des andern Systems *Directrixen* zu nennen.

25. Wenn wir jetzt den dritten Fall betrachten, dass nämlich die Geraden g, g' imaginär conjugiert sind mit reellem Durchschnittspunct, so können wir geraden Wegs schliessen, dass, wenn eine Quadrifläche einen elliptischen Punct hat, alle ihre Puncte elliptisch sind.[2]) In diesem Falle kann man sagen, dass die Fläche zwei Systeme von Geraden enthält, die sämmtlich imaginär sind, und dass jede Tangentialebene die Fläche in zwei imaginären Geraden schneidet, die sich in dem reellen Berührungspuncte kreuzen.[3])

Dadurch zerfallen die Quadriflächen in drei wohlunterschiedene Arten: Flächen mit hyperbolischen Puncten, Flächen mit elliptischen Puncten, Flächen mit parabolischen Puncten oder Kegel.

Die Flächen der ersten Art bilden das einfachste Beispiel derjenigen Flächen, welche durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden und nicht abwickelbar sind *(Windschiefe Flächen)*. Die Oberflächen der drei Arten

---

1) Wren, *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici etc.* (Philos. Trans. 1669, p. 961). Man vgl. Journal de l'école polyt. cah. 1 (1794) p. 5.

2) Dupin, *Développements*, p. 209. Im Allgemeinen haben die Flächen von höherer Ordnung als der zweiten eine Region, deren Puncte sämmtlich hyperbolisch, und eine andere, deren Puncte alle elliptisch sind. Beide Regionen werden durch die parabolische Curve, den Ort der parabolischen Puncte, getrennt. Gergonne, *De la courbure des surfaces courbes* (Annales de Gergonne, T. 21. 1830—31, p. 233).

3) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures.* (Paris 1822). Art. 594.

lassen verschiedene Formen zu, die sich nach der Art des Schnittes classificieren lassen, den die unendlich entfernte Ebene macht, wie es bei den Kegelschnitten der Fall ist. [1])

Die Flächen der ersten Art erstrecken sich, da sie aus Geraden gebildet sind, ins Unendliche, aber die Ebene im Unendlichen kann entweder in einer Curve schneiden, oder berühren, das heisst, in zwei Geraden schneiden. Im ersten Falle heisst die Fläche *windschiefes* oder *einmanteliges Hyperboloid;* im zweiten Falle *windschiefes* oder *hyperbolisches Paraboloid.*

Die Flächen der zweiten Art erstrecken sich entweder nicht ins Unendliche *(Ellipsoid)*, oder werden von der unendlich entfernten Ebene in einer Curve geschnitten *(Zweimanteliges Hyperboloid)*, oder werden von derselben in einem Puncte berührt *(Elliptisches Paraboloid).*

Die Flächen der dritten Art haben entweder den Scheitel in endlicher Entfernung, (*Kegel* in der eigentlichen Bedeutung des Wortes), oder ihre Erzeugenden sind parallel *(Cylinder).* Im letzern Falle heisst der Cylinder, jenachdem die unendlich entfernte Ebene die Fläche in zwei reellen verschiedenen, in zwei imaginären oder in zwei reellen zusammenfallenden Geraden schneidet, *hyperbolisch*, *elliptisch*, *parabolisch.* [2])

26. Wir wollen jetzt die Quadriflächen der ersten Art betrachten. Drei Gerade des einen Systems, die wir als Directrixen ansehen wollen, genügen dann, dieselbe zu individualisieren. Denn durch jeden Punct der einen von den drei Geraden, kann man eine Transversale legen, welche die andern beiden trifft, und alle analogen Transversalen sind die Generatrixen der Fläche. [3]) Aus drei Generatrixen leiten wir in ähnlicher Weise die Directrixen ab. [4])

Zwei beliebig gewählte Directrixen werden von allen Generatrixen in Puncten geschnitten, welche zwei projectivische Punctreihen bilden. Dies

---

1) Ein Kegelschnitt heisst *Hyperbel, Ellipse, Parabel,* je nachdem seine Puncte im Unendlichen reell und verschieden, imaginär sind oder zusammenfallen.

2) Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Tom. 2. app. cap. 5.

3) Es ist sehr leicht auf die Frage zu antworten, von welcher Ordnung der Ort der Geraden x ist, welche drei Gerade g, h, k schneiden. Es sei t eine beliebige Transversale, dann ist die Ordnung der Fläche gleich der Zahl der Geraden x, welche die vier Geraden g, h, k, t schneiden. Von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{g}$ von g ziehe man eine Gerade, die h und auch t in $\mathfrak{t}$ trifft, und aus demselben Puncte $\mathfrak{g}$ ziehe man eine zweite Gerade, welche k und auch t in $\mathfrak{t}'$ trifft. Lässt man $\mathfrak{g}$ auf g variieren, so erzeugen die Puncte $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ zwei projectivische Punctreihen. Die beiden gemeinschaftlichen Puncte derselben geben die beiden Geraden, die alle vier gegebenen g, h, k, t schneiden. Die Fläche ist also von der zweiten Ordnung.

4) Es folgt auch, dass die Fläche durch zwei Directrixen und drei Puncte ebenfalls bestimmt ist, da man, wenn man durch diese drei Puncte die Generatrixen zieht, die drei Paare entsprechender Puncte erhält, die nothwendig aber auch hinreichend sind, um die projectivischen Punctreihen zu individualisieren.

ist klar, wenn man beachtet, dass von einem beliebigen Punct dieser Directrix nur eine einzige Generatrix ausgeht.[1]) Es ist folglich das Doppelverhältniss von vier Puncten, in welchen vier feste Generatrixen eine Directrix schneiden, constant für jede beliebige Directrix.

Dem analog bestimmen zwei Directrixen mit allen Generatrixen zwei projectivische Ebenenbüschel. Es ist also das Doppelverhältniss von vier Ebenen, welche bezüglich durch vier feste Generatrixen gehen und sich sämmtlich in derselben Directrix schneiden, constant für jede beliebige Directrix.

Umgekehrt bilden die Geraden, welche die entsprechenden Puncte zweier projectivischer Punctreihen verbinden, die nicht in derselben Ebene liegen, eine Fläche zweiter Ordnung. Es seien g, h die beiden Geraden, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ irgend zwei entsprechende Puncte, und $\mathfrak{g}'$ der Punct, in welchem g von der Geraden getroffen wird, die von $\mathfrak{h}$ ausgeht und eine willkürlich fixierte Transversale t schneidet. Lassen wir $\mathfrak{h}$ variieren, so erzeugen die Puncte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ zwei projectivische Punctreihen auf g, und die denselben gemeinschaftlichen Puncte geben die beiden Geraden, welche correspondierende Puncte von g, h verbinden und von t geschnitten werden.

Sobald die beiden Geraden in den entsprechenden Puncten in proportionale Stücke getheilt werden, so ist die erzeugte Fläche das windschiefe Paraboloid.[2])

Auch die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Ebenen zweier projectivischer Büschel bilden eine Fläche zweiter Ordnung. Denn eine willkürliche Ebene schneidet die Ebene der beiden Büschel in Geraden, die zwei projectivische Strahlenbüschel bilden. Die entsprechenden Strahlen derselben erzeugen, indem sie sich schneiden, eine Curve zweiter Ordnung, es wird also die fragliche Fläche von einer beliebigen Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten. [3])

---

1) Beachten wir, dass jede Directrix einen Punct im Unendlichen hat, durch den eine Generatrix gehen muss, so sehen wir, dass für das windschiefe Hyperboloid jede Directrix unter den Generatrixen eine Parallele hat. Die Ebene, welche zwei parallele Gerade enthält, eine Generatrix und eine Directrix, berührt in einem unendlich entfernten Puncte, und heisst deshalb *Asymptotenebene.* Im windschiefen Paraboloid dagegen enthält die unendlich entfernte Ebene, da sie die Fläche berührt, eine Generatrix, auf der alle unendlich entfernten Puncte sämmtlicher Directrixen, und eine Directrix, auf der alle unendlich entfernten Puncte sämmtlicher Generatrixen liegen. In diesem Falle schneidet also jede Asymptotenebene die Fläche in einer einzigen Geraden in endlicher Entfernung und alle Asymptotenebenen bilden zwei parallele Ebenenbüschel.

2) Weil die Fläche, da die unendlich entfernten Puncte der beiden projectivischen Punctreihen correspondierende Puncte sind, eine Generatrix in unendlicher Entfernung hat.

3) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.* Berlin 1832. § 51.

Liegen die beiden gegebenen Geraden, durch welche die Ebenen der beiden projectivischen Büschel hindurchgehen, in derselben Ebene, die sich nicht selbst entsprechen möge, so ist die erzeugte Fläche ein Quadrikegel, dessen Scheitel in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der gegebenen Geraden liegt (5).

27. Zieht man von einem beliebigen festen Puncte $\mathfrak{o}$ als *Pol* eine Transversale die eine gegebene Quadrifläche in zwei Puncten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ schneidet, und sucht den in Bezug auf $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ conjugierten harmonischen Punct $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}$, was ist dann der Ort der Puncte, die allen Transversalen entsprechen, welche von $\mathfrak{o}$ ausgehen?

Jede Transversale enthält einen einzigen Punct $\mathfrak{m}$, und dieser Punct kann auch nicht auf $\mathfrak{o}$ fallen, weil $\mathfrak{o}$ als nicht auf der Fläche befindlich angenommen war. Der gesuchte Ort ist also von der ersten Ordnung, das heisst, eine Ebene. Man nennt sie die *Polarebene* des Poles $\mathfrak{o}$. [1])

Nimmt man den Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fläche an, so fällt einer der beiden Schnittpuncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ mit dem Pole zusammen. Für alle Transversalen, die die Fläche in einem zweiten von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Puncte treffen, fällt der harmonische Punct $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{o}$. Wird aber die Transversale Tangente der Fläche in $\mathfrak{o}$, so wird $\mathfrak{m}$ unbestimmt, weil in diesem Falle der Pol und beide Puncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zusammenfallen, es kann also ein beliebiger Punct der Transversale sein. [2]) Der Ort des Punctes $\mathfrak{m}$ ist daher der Ort der Geraden, welche in $\mathfrak{o}$ die Fläche berühren. Wenn also der Pol ein Punct der Fläche selbst ist, so ist die Polarebene die Tangentialebene der Fläche in diesem Puncte. Umgekehrt kann ein Punct nur dann in seiner Polarebene liegen, wenn er ein Punct der Fläche ist.

Betrachtet man auf der Transversale, welche die vier Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ enthält, $\mathfrak{m}$ als Pol, so ist $\mathfrak{o}$ der harmonisch conjugierte Punct. Geht also die Polarebene von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{m}$, so geht umgekehrt die Polarebene von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$. Ist daher eine Ebene gegeben, und man bestimmt die Polarebeen dreier Puncte derselben, so ist der Punct, in welchem sich diese drei Ebenen schneiden der Pol der gegebenen Ebene. Diese kann niemals zwei verschiedene Pole $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ haben, [3]) denn wenn die Gerade $\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2$ die Fläche in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und die Ebenen in $\mathfrak{m}$ trifft, so kann der Punct $\mathfrak{m}$ nicht zwei verschiedene conjugierte harmonische Puncte in Bezug auf dasselbe Paar $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ haben.

So kommt es, dass jeder Punct des Raumes seine Polarebene hat, und umgekehrt jede Ebene ihren Pol. Für alle Puncte, die in einer festen Ebene liegen, geht die Polarebene durch den Pol der festen Ebene, und

---

1) Offenbar schneidet eine beliebige durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene die Polarebene in einer Geraden, welche die Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Durchschnittskegelschnitt der Fläche ist.

2) *Einleitung*, Nr. 17.

3) Nämlich im allgemeinen Falle, dass die Quadriflächen keinen Doppelpunct haben. Man sehe die Anmerkung [1]) auf Seite 31.

alle Ebenen, die durch einen festen Punct gehen, haben ihren Pol auf der Polarebene des festen Punctes.

28. Es seien M, N die Polarebenen der beiden Puncte $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Für jeden Punct der Geraden MN, die natürlich in beiden Ebenen M, N liegt, geht die Polarebene sowohl durch $\mathfrak{m}$ als durch $\mathfrak{n}$, das heisst durch die Gerade $\mathfrak{mn}$. Also ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen durch eine feste Gerade $\mathfrak{mn}$ gehen, eine andere Gerade MN. Die Polarebene eines beliebigen Punctes von MN geht durch jeden Punct der Geraden $\mathfrak{mn}$, folglich geht die Polarebene jedes Punctes von $\mathfrak{mn}$ durch die Gerade MN. Die Geraden $\mathfrak{mn}$ und MN sind mithin so untereinander verknüpft, dass jede die Pole der Ebenen enthält, welche durch die andern sich legen lassen, und dass jede in der Polarebene der Puncte der andern liegt. Zwei Gerade, welche diese Beziehung zu einander haben, heissen *conjugiert* oder *reciprok* in Bezug auf die Quadrifläche. Man nennt wohl auch die eine die Polare der andern.

Jede Gerade hat ihre Conjugierte. Geht eine Gerade r durch einen Punct $\mathfrak{m}$, so liegt die conjugierte Gerade r' in der Polarebene M von $\mathfrak{m}$, und umgekehrt [1]). Folglich sind die Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, die conjugierten Geraden aller Geraden der Ebene M, und es können daher zwei conjugierte Gerade nicht gleichzeitig in einer Ebene M liegen, ohne dass sie beide durch den Pol $\mathfrak{m}$ gehen. In diesem Falle ist aber $\mathfrak{m}$ ein Punct der Fläche, M ist die Tangentialebene, und die beiden Conjugierten sind beide Tangenten der Fläche. Berührt umgekehrt eine Gerade die Quadrifläche in $\mathfrak{m}$, so liegt die Conjugierte in der Ebene M, welche in $\mathfrak{m}$ berührt, und da die erste Gerade auch in M liegt, so geht die zweite ebenfalls durch $\mathfrak{m}$, das heisst die beiden Geraden sind Tangenten der Fläche im nämlichen Puncte. Es trifft also im Allgemeinen eine Gerade ihre Conjugierte nicht, wenn aber der Durchschnitt statt hat, so sind beide Gerade Tangenten in demselben Puncte der Fläche.

Die Geraden, welche die Fläche in $\mathfrak{m}$ berühren, sind zu zwei und zwei conjugiert, sie bilden also eine Involution zweiten Grades. [2]) Diese hat zwei Doppelstrahlen, das heisst, es gibt unter diesen Tangenten zwei, die sich selbst conjugierte Gerade sind. Eine sich selbst conjugierte Gerade liegt in der Polarebene ihrer eigenen Puncte, das heisst alle ihre Puncte liegen in den entsprechenden Polarebenen oder auf der Fläche; das will sagen, eine sich selbst conjugierte Gerade ist nothwendigerweise eine Gerade, die auf

---

1) *Centrum* heisst der Pol der unendlich entfernten Ebene. In ihm halbieren sich alle Sehnen der Fläche, die durch denselben gehen. *Durchmesser* ist eine Gerade durch das Centrum. Eine Ebene heisst *Diametralebene*, wenn ihr Pol im Unendlichen liegt. Ein Durchmesser und eine Diametralebene heissen *conjugiert*, wenn die letztere die conjugierten Geraden der ersteren enthält; die Ebene halbiert die zum Durchmesser parallelen Sehnen. Drei Durchmesser heissen *conjugiert*, wenn jeder derselben der Ebene der beiden andern conjugiert ist.

2) *Einleitung*, Nr. 25.

der Fläche selbst liegt. Die Doppelstrahlen der Involution, die durch die in $\mathfrak{m}$ conjugierten Tangenten gebildet wird, sind mithin die in $\mathfrak{m}$ sich kreuzenden Geraden auf der Fläche. Es ergibt sich also, dass zwei conjugierte Tangenten mit den im Berührungspuncte sich kreuzenden Geraden der Fläche ein harmonisches System bilden.

Ist die Quadrifläche ein Kegel, so fallen die beiden Doppelstrahlen der Involution mit der Generatrix, die durch den betrachteten Punct geht, zusammen. Diese Generatrix ist nicht blos sich selbst conjugiert, sondern auch jeder beliebigen Geraden, welche den Kegel in einem ihrer Puncte berührt.

29. Wir wollen jetzt untersuchen, von welcher Classe (16) eine Fläche zweiter Ordnung ist. Die Tangentialebenen, die durch eine gegebene Gerade r gehen, haben ihre Pole, die Berührungspuncte, auf der conjugierten Geraden r'. Man kann also durch r soviele Ebenen ziehen, die die Fläche berühren, als diese Fläche Durchschnittspuncte mit r' hat. Eine Fläche zweiter Ordnung ist also auch zweiter Classe.

Fallen die beiden Schnittpuncte $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ der Fläche und r' in einen Punct zusammen, so fallen auch die Tangentialebenen durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ zusammen, das heisst die Tangentialebenen, welche durch r' gehen. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Geraden r, r' conjugierte Tangenten (28), und eine Tangente ist also nicht blos die Gerade, welche zwei unendlich nahe Puncte verbindet, sondern auch der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen. Ebenso ist von zwei conjugierten Tangenten eine jede der Durchschnitt der Ebenen, welche die Fläche in den unendlich nahen Puncten berühren, welche auf der andern Geraden liegen.

30. Ziehen wir durch einen Punct $\mathfrak{o}$ des Raumes den wir als Pol (27) betrachten, eine Gerade, welche die Fläche in einem Puncte $\mathfrak{a}$ berührt, der beide Durchschnittspuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ vertritt, so fällt der conjugierte harmonische Punct $\mathfrak{m}$ ebenfalls auf $\mathfrak{a}$, das heisst, $\mathfrak{a}$ ist ein Punct der Polarebene von $\mathfrak{o}$.[1]) Der Ort der Puncte, in welchen die Quadrifläche von Geraden berührt wird, die vom Pole ausgehen, ist also die Curve zweiter Ordnung, die den Durchschnitt der Fläche mit der Polarebene bildet. Die Tangente dieser Curve in $\mathfrak{a}$ hat, da sie in der Polarebene liegt, als ihre Conjugierte, die Gerade

---

1) Daraus folgt: Ist die Quadrifläche ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{v}$, so geht die Polarebene jedes Punctes $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{v}$. Diese Polarebene verändert sich nicht, wenn der Pol sich auf der Geraden $\mathfrak{ov}$ bewegt. Die Polarebene ist in der That in diesem Falle der Ort der conjugierten harmonischen Geraden von $\mathfrak{ov}$ in Bezug auf die beiden Generatrixen des Kegels, die man erhält, wenn man ihn durch eine um $\mathfrak{ov}$ variable Ebene schneidet. Wenn die Gerade $\mathfrak{ov}$ sich in einer festen Ebene, die durch den Scheitel geht, bewegt, so rotiert die Polarebene um eine Gerade, deren Puncte die Pole der festen Ebene sind. Wir finden so das System von Geraden und Polarebenen wieder, das wir schon aus der Theorie der Kegelschnitte abgeleitet hatten (5). Die Polarebene des Scheitels ist offenbar unbestimmt.

𝔞𝔬, die nach dem Pole gerichtet ist, und die Ebene dieser beiden Geraden ist gleichzeitig Tangentialebene der Quadrifläche in 𝔞, und längs 𝔬𝔞 die des Kegels, welcher der Ort der Geraden 𝔞𝔬 ist. Dieser Kegel, der von der zweiten Ordnung ist, da einer seiner ebenen Schnitte von der zweiten Ordnung ist, heisst der Quadrifläche *umgeschrieben.* [1])

Folglich ist der Ort der Geraden, die durch einen gegebenen Punct gehen, und die Quadrifläche berühren, oder auch die Enveloppe der Ebenen, welche durch denselben gegebenen Punct gehen, und die Fläche berühren, ein Kegel zweiter Ordnung. [2]) Die Berührungscurve ist eben, und ihre Ebene ist die Polarebene des Kegelscheitels. Umgekehrt umhüllen die Tangentialebenen der Fläche in den Puncten eines ebenen Schnittes einen Kegel, dessen Scheitel der Pol der Schnittebene ist. [3])

---

[1]) Berühren sich zwei Quadriflächen längs einer Curve, so ist diese immer eben. Denn, sind 𝔞, 𝔟, 𝔠 drei Puncte der Berührungscurve, so schneidet die Ebene 𝔞𝔟𝔠 beide Flächen in zwei Kegelschnitten, die, weil sie drei Berührungspuncte unter sich haben, nothwendiger Weise zusammenfallen; ausser diesem Berührungskegelschnitt haben die beiden Flächen keinen weiteren Punct gemein (20). Eine Ebene, die durch eine Tangente dieses Kegelschnittes gelegt ist, schneidet beide Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, die einen vierpunctigen Contact haben (22).

[2]) Folglich umhüllen die Ebenen, die durch einen festen Punct und durch die Geraden gehen, welche die entsprechenden Puncte zweier gegebener projectivischer Punctreihen verbinden (26), einen Quadrikegel. (Steiner, *Systemat. Entwickelungen.* S. 187.)

[3]) Hieraus folgt, dass die Asymptotenebenen (Tangentialebenen im unendlich entfernten Puncte) einen Kegel umhüllen, dessen Scheitel der Pol der unendlich entfernten Ebene ist, das heisst das Centrum der Fläche. Hieraus erschliesst man eine sehr einfache Regel, um das Centrum eines Hyperboloids zu finden, von dem drei Directrixen gegeben sind. (Hachette, *Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung*, Crelles Journal T. 1. 1826; S. 345.)

Combinieren wir den Satz in Nr. 30 mit denen in Nr. 27, 28, so können wir sagen: Bewegt sich der Scheitel eines einer gegebenen Quadrifläche ungeschriebenen Kegels so, dass er eine Gerade oder eine Ebene durchläuft, so geht die Ebene der Berührungscurve beständig durch eine feste Gerade oder einen festen Punct. Diesen Satz verdankt man Monge, *Géométrie déscriptive,* Art. 40.

CAPITEL V.

OBERFLÄCHEN BELIEBIGER CLASSE. RECIPROKE POLAREN.

31. Es sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiger Punct einer gegebenen Fläche, M die Tangentialebene in diesem Puncte, und $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ seien in dieser Ebene die auf $\mathfrak{m}$ nach drei verschiedenen Richtungen hin folgenden Puncte, das heisst, es seien $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ drei Tangenten in $\mathfrak{m}$. Legt man durch die Puncte $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ eine Fläche zweiter Ordnung, so wird diese in $\mathfrak{m}$ von der Ebene M berührt, sie wird also auch den Punct $\mathfrak{m}_3$ enthalten, was auch die Richtung von $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ auf M ist. Die beiden Flächen besitzen also in $\mathfrak{m}$ eine gemeinschaftliche Tangentialebene. Wir wollen jetzt annehmen, die Fläche werde durch eine Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ enthält, durch eine zweite Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_2$ enthält, und durch eine dritte Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ enthält in der Art geschnitten, dass dadurch drei Curven entstehen. In diesen Schnitten seien $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, $\mathfrak{m}_3'$ die auf $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1$; $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2$; $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_3$ folgenden Puncte. Denken wir uns jetzt, dass obengenannte Quadrifläche auch durch die Puncte $\mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \mathfrak{m}_3'$ gehen soll, so osculieren sich die Flächen in $\mathfrak{m}$, das heisst, die Schnitte beider, die man durch eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene erhält, haben in diesem Puncte einen dreipunctigen Contact (19), und speciell liegen die Osculierenden der beliebigen Fläche vollständig auf der Quadrifläche. Die beiden Flächen haben folglich nicht nur in $\mathfrak{m}$ die Tangentialebene gemein, sondern in jedem Puncte $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ der unmittelbar auf $\mathfrak{m}$ folgt. Es besteht also, wie für jede Quadrifläche, die Beziehung, dass jede Tangente in $\mathfrak{m}$ der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen ist, deren Berührungspuncte in einer andern Tangente liegen, und dass umgekehrt in den beiden unmittelbar folgenden Puncten, die der ersten Tangente und der Fläche gemein sind, diese von zwei Ebenen berührt wird, die durch die zweite Tangente gehen. Die Tangenten der beliebigen Fläche in $\mathfrak{m}$ sind also zu zwei und zwei in der Art *conjugiert*, dass von zwei Conjugierten jede die Berührungspuncte der beiden unmittelbar folgenden Tangentialebenen enthält, welche durch die andere gehen. [1]) Die conjugierten Tangentenpaare bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die Geraden auf der Quadrifläche sind, das heisst die Osculierenden der beliebigen Fläche.

Ist $\mathfrak{m}$ ein parabolischer Punct der gegebenen Fläche, so fallen in ihm die beiden Osculierenden zusammen, die osculierende Quadrifläche ist also ein Kegel. In $\mathfrak{m}$ und im Puncte $\mathfrak{m}'$, der unmittelbar auf $\mathfrak{m}$ in der Osculieren-

---

1) DUPIN, *Développements*, p. 44.

den, das heisst in der Generatrix des Kegels folgt, haben beide Flächen die Tangentialebenen gemein. Da aber der Kegel in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ von derselben Ebene berührt wird, so berührt also die Ebene, welche die Fläche in $\mathfrak{m}$ berührt, auch in $\mathfrak{m}'$. Eine Tangentialebene in einem parabolischen Puncte muss also als eine Tangentialebene in zwei unendlich nahen Puncten betrachtet werden. Wegen dieser Eigenschaft heisst sie *stationäre Ebene.* Da in diesem Falle jede Tangente durch $\mathfrak{m}$ der Osculierenden conjugiert ist, so geht die Tangentialebene in einem beliebigen auf $\mathfrak{m}$ unmittelbar folgenden Puncte durch die letztern Gerade. [1])

Berühren sich zwei Flächen in einem Puncte $\mathfrak{m}$, so bilden die conjugierten Tangenten zwei Involutionen, und da diese ein einziges Paar conjugierter Strahlen gemein haben, [2]) so haben im Allgemeinen die beiden Flächen nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher conjugierter Tangenten. Gäbe es zwei Paar gemeinschaftlicher conjugierter Tangenten, so fielen die beiden Involutionen zusammen, jede Tangente hätte für beide Flächen dieselbe Conjugierte und sie hätten folglich auch die Osculierenden gemein.

32. Man denke sich jetzt alle Geraden, die von einem Puncte $\mathfrak{o}$ im Raume so gezogen werden können, dass sie eine gegebene willkürliche Fläche berühren, auf der natürlich die Berührungspuncte eine gewisse Curve bilden. Sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ zwei unmittelbar folgende Puncte dieser Curve, so sind die Geraden $\mathfrak{om}$, $\mathfrak{mm}'$, als conjugierte Tangenten der in $\mathfrak{m}$ osculierenden Quadrifläche, dies auch für die beliebige Fläche. Die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ diese Fläche berührt, ist längs $\mathfrak{om}$ auch Tangentialebene des ihr *umgeschriebenen* Kegels, das heisst des Kegels, der von Tangenten gebildet wird, die durch $\mathfrak{o}$ gehen. Dieser Kegel ist also die Enveloppe der Ebenen, die sich durch $\mathfrak{o}$ so ziehen lassen, dass sie die Fläche berühren.

33. Die eben auseinandergesetzten Betrachtungen zeigen, dass eine Fläche beliebiger Ordnung auch als *Enveloppe* ihrer Tangentialebenen definiert werden kann. Eine *Enveloppe* kann man durch eine Ebene entstanden denken, die sich continuierlich im Raume so bewegt, dass eine beliebige Gerade in einer Zahl getrennter Lagen der variablen Ebene liegt. [3]) Die Enveloppenfläche heisst von der *ν-ten Classe,* [4]) wenn durch eine beliebige Gerade ν ihrer (reellen, imaginären, getrennten, zusammenfallenden) Ebenen hindurch gehen. Gehen daher durch eine Gerade mehr als ν Tangentialebenen einer Fläche

---

1) Salmon, *On the condition that a plane should touch a surface etc.* (Cambridge and Dublin. Math. Journal, T. 3; 1848. p. 45).

2) *Einleitung*, Nr. 25 b.

3) Das heisst in der Art, dass alle successiven Lagen der variablen Ebene sich erhalten lassen, wenn man sich zwei unabhängige Parameter verändert denkt. Eine Enveloppe, die Developpablen ausgeschlossen, ist also eine *doppelt unendliche Reihe von Ebenen.*

4) Gergonne, *Rectification de quelques théorèmes etc.* (Annales de Gergonne, T. 18; 1827—28. p. 151).

ν-ter Classe, so gehören alle Ebenen, die durch diese Gerade gehen, der Enveloppe an, das heisst, die Gerade liegt vollständig auf der Fläche.

Die Enveloppe erster Classe ist ein einfacher Punct.

Die Tangentialebenen einer Fläche ν-ter Classe, die durch einen festen Punct gehen, umhüllen einen umgeschriebenen Kegel derselben Classe.

Man sagt, dass eine Gerade *Tangente* der Fläche in einer Ebene M ist, die die Fläche ebenfalls berührt, wenn zwei der durch sie gehenden Tangentialebenen mit M zusammenfallen. Es seien r, r' zwei Tangenten in der Ebene M und man betrachte ihren Durchschnittspunct $\mathfrak{m}$ als Scheitel eines umgeschriebenen Kegels. Da zwei von den Tangentialebenen, die man durch r und r' an den Kegel ziehen kann, mit M zusammenfallen, so ist diese eine Bitangentialebene des Kegels und vertritt also zwei unmittelbar folgende Tangentialebenen desselben, und folglich auch der Fläche für irgend eine andere durch $\mathfrak{m}$ in genannter Ebene gezogene Gerade. Das heisst, alle diese Geraden sind Tangenten der Fläche in der Ebene M. Daraus folgt, dass die Geraden, welche die Fläche in der Ebene M berühren, das heisst die Geraden, für welche M zwei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt, durch denselben Punct $\mathfrak{m}$ gehen, den man *Berührungspunct* der Ebene M nennt. Unter diesen Geraden gibt es zwei, die Berührungsgeneratrixen des Kegels mit der Bitangentialebene, für welche M drei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt. Die Tangenten sind ferner zu zwei in der Art conjugiert, dass von je zweien die eine alle Berührungspuncte der unmittelbar folgenden Tangentialebenen enthält, welche durch die andere gehen. Die Doppelstrahlen der Involution, die durch diese Tangentenpaare erzeugt wird, sind die Geraden, für welche M drei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt. Diese Geraden sind also auch die nämlichen, welche in $\mathfrak{m}$ mit der Fläche einen dreipunctigen Contact haben (16).

34. In solcher Weise kann man eine beliebige Fläche sowohl als *Ort von Puncten* und auch als *Enveloppe von Ebenen* betrachten. Wenden wir die vorhergehenden Untersuchungen auf eine Fläche zweiter Classe an, das heisst auf eine Fläche, an die sich durch eine beliebige Gerade zwei Tangentialebenen ziehen lassen, so finden wir, dass die Tangentialebenen, die durch einen Punct $\mathfrak{m}$ der Fläche gehen, einen Kegel zweiter Classe umhüllen, der eine Bitangentialebene M hat. Diese Ebenen gehen also durch zwei Gerade g, g', die sich in $\mathfrak{m}$ schneiden, und in der Ebene M liegen, welche in diesem Puncte die Fläche berührt (5). Iede dieser Geraden liegt also in einer unbegrenzten Zahl von Tangentialebenen und folglich ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche.

Eine beliebig durch g gelegte Ebene ist eine Tangentialebene der Fläche, und schneidet sie daher in einer neuen Geraden h'. In ähnlicher Weise enthält jede durch g' gelegte Ebene eine andere Gerade h der Oberfläche. Auf dieser gibt es folglich zwei Systeme von Generatrixen $(g, h, \ldots)$,

$(g', h', \ldots)$, und durch jeden Punct der Fläche geht eine Gerade des einen und eine Gerade des andern Systems.

Von welcher Ordnung ist diese Fläche? Diese Frage ist gleichbedeutend mit der andern, wie viele Generatrixen ein und desselben Systems werden von einer beliebigen Geraden geschnitten. Durch die letztere Gerade gehen nur zwei Tangentialebenen, das heisst nur zwei Ebenen, von denen jede eine Generatrix des Systems enthält, also ist eine Fläche zweiter Classe auch zweiter Ordnung.

In einer beliebig gegebenen Ebene O ziehe man eine ganz beliebige Transversale, durch die zwei Ebenen A_1, A_2 gehen, welche eine gegebene Quadrifläche, das heisst eine Fläche zweiter Classe und zweiter Ordnung berühren. Es sei nun M die in Bezug auf A_1 und A_2 zu O conjugierte harmonische Ebene. Da man durch jede Lage der Transversale nur eine einzige Ebene M erhält, und da M nicht mit der Ebene O zusammenfallen kann, vorausgesetzt, dass diese nicht die Fläche berührt, so ist die Enveloppe aller zu M analoger Ebenen von der ersten Classe, alle diese Ebenen gehen also durch einen festen Punct $\mathfrak{o}$.

Ist die Transversale in der Art geführt, dass sie die Fläche in einem Puncte $\mathfrak{a}$ des Schnittes berührt, den die Ebene O bildet, so fallen die Ebenen A_1, A_2 in eine zusammen, nämlich in die Ebene A, welche in $\mathfrak{a}$ berührt. Es fällt dann auch die Ebene M mit A zusammen. Die Ebenen also, welche die Fläche in den Puncten des Schnittes berühren, der durch die Ebene O entsteht, gehen sämmtlich durch $\mathfrak{o}$. Es folgt hieraus, dass $\mathfrak{o}$ der Pol der Ebene O ist, nach der anderswo gegebenen Definition (27).

35. Es hat wohl jeder bemerkt, dass das Raisonnement hier vollständig mit dem parallel läuft, das wir für die Flächen, als Ort von Puncten betrachtet, eingehalten haben, und gleichwohl, ohne dass die eine Untersuchung nothwendigerweise die andere voraussetzt. Hierin besteht das Gesetz der *geometrischen Dualität*, dem zufolge neben einer Eigenschaft, die sich auf Puncte, Gerade, Ebenen bezieht, noch eine andere analoge besteht in Bezug auf Ebenen, Gerade, Puncte. [1])

Anstatt aber zwei reciproke Theoreme unabhängig von einander zu beweisen, oder das eine aus dem andern zu erschliessen, indem man das *Princip der Dualität*, a priori als absolutes Gesetz betrachtet, in Anwendung bringt, kann man den einen Satz auch aus dem andern mittelst der Theorie der Pole in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung herleiten. Nimmt man von jedem Puncte, jeder Geraden, jeder Ebene einer gegebenen Figur die Polarebene, die conjugierte Gerade und den Pol in Bezug auf die

---

1) Gergonne, *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue* (Annales de Gergonne, T. 16; 1825–26. p. 209). — Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles, T. 11; 1827. Notes 5 und 34).

feste Quadrifläche, so erhält man eine zweite Figur, in der die Puncte, Geraden, Ebenen in derselben Folge den Ebenen, Geraden, Puncten der ersten Figur entsprechen. Den Puncten einer Geraden entsprechen die Ebenen durch eine andere Gerade, das heisst, einer geraden Punctreihe entspricht ein Ebenenbüschel, und es ist offenbar, dass diese beiden Formen projectivisch sind, dass also das Doppelverhältniss von vier Puncten in gerader Linie gleich dem der entsprechenden vier Ebenen ist.

Zwei so beschaffene Figuren nennt man *reciproke Polaren*. Einem Satze für die eine Figur entspricht das reciproke Theorem für die andere. In dieser Weise zeigt sich das Princip der Dualität als eine Folgerung der Theorie der Flächen zweiter Ordnung. — *Methode der reciproken Polaren.* [1]) —

36. Beschreibt in der ersten Figur ein Punct eine Fläche ν-ter Ordnung S, so bleibt die entsprechende Ebene in der zweiten Figur stets Tangentialebene einer Fläche ν-ter Classe S'. [2]) Einem Puncte $\mathfrak{p}$ der ersten Fläche entspricht eine Ebene P', die S' berührt. Den Tangenten von S in $\mathfrak{p}$ entsprechen die Tangenten von S' in P'. Die ersten Tangenten liegen nun aber in der Ebene P, welche S in $\mathfrak{p}$ berührt, und die zweiten gehen durch den Punct $\mathfrak{p}'$, in welchem S' von P' berührt wird, und es ist also P genau die Ebene, welche dem Punct $\mathfrak{p}'$ entspricht. Daraus folgt, dass, wenn in der zweiten Figur ein Punct die Fläche S' beschreibt, die entsprechende Ebene fortwährend die Oberfläche S berührt. Ist also S von der μ-ten Classe, so ist S' von der μ-ten Ordnung, und so sieht man die vollkommene Reciprocität zwischen den Flächen S, S', die deswegen *reciproke Polaren* heissen. [3])

37. Ist in der ersten Figur eine abwickelbare Fläche **S** gegeben, das heisst eine einfach unendliche Reihe von Ebenen, so entspricht ihr in der zweiten Figur eine einfach unendliche Reihe von Puncten, also eine Curve $\mathbf{s}'$, und umgekehrt entspricht einer Curve eine Developpable. Den Generatrixen von **S**, das heisst den Geraden, durch welche je zwei unendlich nahe Tangentialebenen gehen, entsprechen die Geraden, welche zwei unmittelbar folgende Puncte von $\mathbf{s}'$ verbinden, das heisst die Tangenten dieser Curve.

---

1) Poncelet, *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques.* (Crelles Journal, Th. 4; 1829).

2) Beschreibt also der Pol eine Fläche zweiter Ordnung, so ist eine Fläche derselben Ordnung die Enveloppe der Polarebenen. Livet, *Propriétés des surfaces du second degré;* und Brianchon, *Mémoire sur les surfaces du second degré* (Journal de l'école polytechnique, Cah. 10; 1806).

3) Monge, *Mémoire* (inédit) *sur les surfaces reciproques* (M. s. Aperçu, Note 30. S. 405 der deutschen Uebersetzung). Wir haben schon früher (18) gesehen, wie viele Puncte nöthig sind, um eine Ortsfläche ν-ter Ordnung zu bestimmen. Dieselbe Zahl von Tangentialebenen bestimmt auch eine Enveloppenfläche ν-ter Classe.

Den Puncten einer Generatrix von **S** entsprechen die Ebenen, welche durch die entsprechende Tangente von **s'** gehen, das heisst die Ebenen, welche **s'** in denselben Puncten berühren. Da nun eine Developpable eine doppelt unendliche Reihe von Puncten ist, das heisst ein specieller Fall der Ortsflächen, so ist eine Curve eine doppelt unendliche Reihe von Ebenen, das heisst ein Specialfall der Enveloppenflächen.

Es sei P eine Tangentialebene von **S**, $\mathfrak{p}'$ der entsprechende Punct von **s'**. Dann enthält die Ebene P zwei unmittelbar folgende Erzeugende von **S**, und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte $\mathfrak{p}$ derselben entspricht die Ebene P', die durch zwei unmittelbar folgende Tangenten von **s'** bestimmt wird, die sich in $\mathfrak{p}'$ schneiden. Also entspricht dem Puncte $\mathfrak{p}$ der Cuspidalcurve von **S** die Osculationsebene P' von **s'** in $\mathfrak{p}'$. Durchläuft daher ein Punct die Cuspidalcurve von **S**, so bleibt die entsprechende Ebene Osculationsebene von **s'**, das heisst ihre Enveloppe ist die osculierende Developpable von **s'**. Den Durchschnittspuncten zweier nicht benachbarter Erzeugenden von **S** entsprechen die Ebenen, welche zwei nicht benachbarte Tangenten von **s'** enthalten, das heisst der Knotencurve von **S** entspricht die doppeltberührende Developpable von **s'**; u. s. w. Ist folglich für **S** die Ordnung gleich ρ, die Classe gleich μ, die Ordnung der Cuspidalcurve gleich ν, die Ordnung der Doppelcurve gleich ξ, die Zahl der stationären Ebenen gleich α, γ die Zahl der Geraden, die in einer Ebene liegen, und durch deren jede zwei Tangentialebenen gehen, u. s. w., dann ist die Curve **s'** von der Ordnung μ, ihre osculierende Developpable hat die Ordnung ρ und die Classe ν, ihre doppeltberührende Developpable ist von der Classe ξ; **s'** hat α Spitzen und γ Sehnen, die durch denselben beliebigen Punct gehen; u. s. w.

Ist als specieller Fall die Developpable **S** ein Kegel, das heisst, gehen alle Ebenen der Reihe durch einen festen Punct, so liegen die entsprechenden Puncte alle in einer festen Ebene, das heisst **s'** ist eine ebene Curve. [1])

38. Wir betrachten von Neuem die reciproken Flächen S, S'. Den ebenen Schnitten der ersten entsprechen dann die umgeschriebenen Kegel der anderen Fläche. Hat die Fläche S einen *Doppelpunct*, in dem sie von einer unbegrenzten Zahl von Geraden osculiert wird, die einen Quadrikegel bilden, so besitzt S' eine *Doppeltangentialebene*, in welcher *zwei* Tangentialebenen für jede Gerade, die beliebig auf derselben gezogen ist, zusammenfallen und *drei* für jede Tangente eines gewissen Kegelschnittes, welcher die Berührungscurve zwischen der Fläche und der Ebene ist. Dieser Kegel

---

[1]) Livet und Brianchon, *a. a. O.*

Ist **S** ein Quadrikegel, so ist **s'** ein Kegelschnitt. Wie also ein Quadrikegel ein Specialfall einer Fläche zweiter Ordnung ist, so ist ein Kegelschnitt ein Specialfall unter den Oberflächen zweiter Classe. Man erhält diesen Fall, wenn in einer Tangentialebene und folglich in allen die beiden Osculirenden in eine einzige Gerade zusammenfallen, welche die Tangente der Curve ist. Alle Ebenen, die durch diese Gerade gehen, haben denselben Berührungspunct.

kann in zwei getrennte Ebenen zerfallen *(Biplanarpunct)* oder in zwei zusammenfallende degenerieren *(Uniplanarpunct)*. Ebenso kann der Kegelschnitt in zwei getrennte Puncte degenerieren *(Bitangentialebene)* oder in zwei unmittelbar folgende *(stationäre Ebene)* (31).

Hat allgemein S einen ρ-fachen Punct, das heisst einen Punct, der ρ zusammenfallende Durchschnittspuncte für jede beliebige durch ihn gelegte Gerade darstellt, aber $\rho+1$ Durchschnitte für die Generatrixen eines gewissen Osculationskegels ρ-ter Ordnung, so besitzt S' eine ρ-fache Tangentialebene, das heisst eine Ebene, welche die Stelle von ρ zusammenfallenden Tangentialebenen für jede in ihr beliebig gezogene Gerade und $\rho+1$ zusammenfallende Tangentialebenen für jede Gerade vertritt, welche durch eine gewisse Curve ρ-ter Classe (die Berührungscurve) berührt wird. Und jenachdem der osculierende Kegel sich in kleinere Kegel oder auch in Ebenen spaltet, wird sich auch die Berührungscurve in Curven niederer Classe oder auch in Puncte auflösen.

Wie ein Ort ν-ter Ordnung mit einem ν-fachen Punct ein Kegel ist, so bildet eine Enveloppe ν-ter Classe mit einer ν-fachen Tangentialebene eine ebene Curve. [1])

39. Einer Curve $\mathbf{s}'$ auf S' gezogen entspricht eine Developpable $\mathbf{S}$, die von den Tangentialebenen von S gebildet wird *(die S umgeschriebene Developpable)*, und der Curve der Berührungspuncte zwischen $\mathbf{S}$ und S entspricht die Developpable, die von den Tangentialebenen von S' in den Puncten von $\mathbf{s}'$ gebildet wird, das heisst die S' längs $\mathbf{s}'$ umgeschriebene Developpable. Ist $\mathbf{s}'$ eine Doppelcurve für S', das heisst eine Curve, von der jeder Punct ein Biplanarpunct der Fläche ist, so ist die Developpable $\mathbf{S}$ die doppeltberührende von S, das heisst, sie wird von den Ebenen gebildet, welche jede mit S zwei getrennte Berührungspuncte haben. Ist $\mathbf{s}'$ die Cuspidalcurve von S', das heisst die Curve, in deren jedem Puncte die Fläche zwei zusammenfallende Tangentialebenen hat, so ist die Developpable

1) Später findet sich, dass durch einen Doppelpunct einer Fläche vier Polarflächen gehen müssen, die, im Falle die Fläche in ihrer Ordnung vollständig allgemein ist, keinen Punct gemein haben. Daraus folgt, dass die allgemeinste Fläche einer gegebenen Ordnung keine Doppelpuncte hat. Damit eine Ebene die Fläche in einem Puncte, in zwei (getrennten oder unmittelbar folgenden) Puncten, in drei Puncten berühre, muss man, wenn die Berührungspuncte nicht gegeben sind, einer, zwei, drei Bedingungen Genüge leisten. Nun ist eine Ebene gerade durch drei Bedingungen bestimmt, und eine in ihrer Ordnung allgemeine Fläche hat daher eine einfach unendliche Reihe Bitangentialebenen, eine einfach unendliche Reihe stationärer Ebenen und eine endliche Reihe dreifacher Tangentialebenen.

Reciprok: Eine völlig allgemeine Fläche, was die Classe betrifft, hat keine vielfachen Tangentialebenen, wohl aber unendlich viele Biplanarpuncte, die eine Knotencurve bilden, eine unbegrenzte Zahl Uniplanarpuncte, die eine Cuspidalcurve erzeugen, und eine endliche Zahl *Triplanarpuncte* (dreifache Puncte mit den Osculierenden in drei verschiedenen Ebenen).

S die osculierende von S, das heisst, sie wird von solchen Ebenen gebildet, die zwei unmittelbar folgende Berührungspuncte mit S haben. Diese Ebenen sind die sogenannten *stationären*, und ihre Berührungspuncte sind die parabolischen Puncte (31) der Fläche.

Der Curve, in welcher sich zwei Flächen S, T schneiden, entspricht die Developpable, die durch die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der entsprechenden Flächen S', T' entsteht. [1]) Den gemeinschaftlichen Schnittpuncten dreier Flächen entsprechen die Ebenen, welche die drei entsprechenden Flächen zugleich berühren; den Flächen, welche durch ein und dieselbe Curve gehen, die Flächen, welche von ein und derselben Developpablen berührt werden; u. s. w.

Berühren sich zwei Flächen S, T in einem Puncte $\mathfrak{p}$, das heisst, haben sie einen gemeinsamen Punct $\mathfrak{p}$ mit derselben Tangentialebene P, so haben die reciproken Flächen S', T' die Tangentialebene P' gemein mit demselben Berührungspuncte $\mathfrak{p}'$, das heisst, auch S', T' berühren sich in einem Puncte $\mathfrak{p}'$. Wenn S, T sich längs einer Curve berühren, so thun dies S', T' längs einer anderen Curve; u. s. w.

40. Haben zwei Flächen ν-ter Ordnung eine Curve $\nu\rho$-ter Ordnung gemein, die auf einer Fläche ρ-ter Ordnung ($\rho < \nu$) liegt, so schneiden sie sich ausserdem in einer anderen Curve $\nu(\nu-\rho)$-ter Ordnung, die auf einer Fläche der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung liegt. [2]) Aus diesem Satze erhält man mittelst der Methode der reciproken Polaren folgendes andere Theorem: Sind zwei Flächen ν-ter Classe in eine Developpable $\nu\rho$-ter Classe eingeschrieben, in welche auch eine Fläche ρ-ter Classe eingeschrieben ist, so gibt es eine andere Developpable $\nu(\nu-\rho)$-ter Classe, welche beiden Flächen ν-ter Classe und einer neuen Fläche $(\nu-\rho)$-ter Classe umgeschrieben ist.

So hat man zum Beispiel für $\nu=2$, $\rho=1$:

Gehen zwei Quadriflächen durch dieselbe ebene Curve, so schneiden sie sich noch in einer anderen ebenen Curve. [3]) Und sind zwei Quadri-

---

[1]) Wir haben früher die Anzahl der Puncte gefunden, welche die gemeinsame Curve zweier Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2 individualisieren, ebenso viele Tangentialebenen bestimmen die zwei Oberflächen ν_1-ter und ν_2-ter Classe gleichzeitig ungeschriebene Developpable.

[2]) Man beweist dieses Theorem, indem man die gegebenen Flächen durch eine beliebige Ebene schneidet und beachtet, dass für die entstandenen Curven folgender Satz Platz greift: Wenn zwei Curven ν-ter Ordnung sich in $\nu\rho$ Puncten schneiden, die auf einer Curve ρ-ter Ordnung liegen, so haben sie noch $\nu(\nu-\rho)$ andere Puncte gemein, die auf einer Curve $(\nu-\rho)$-ter Ordnung liegen. (*Einleitung*, Nr. 43).

[3]) Dies findet statt, wenn die beiden Quadriflächen sich in zwei Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die nicht auf einer gemeinschaftlichen Geraden liegen, berühren. Die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sind dann für den vollständigen Durchschnitt beider Flächen Doppelpuncte (19); folglich schneidet sie die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und durch einen anderen gemeinschaftlichen

flächen demselben Kegel eingeschrieben, der natürlich von der zweiten Ordnung sein muss, so haben sie noch einen anderen umgeschriebenen Kegel gemein.

Punct gelegte Ebene in ein und demselben Kegelschnitte, weil zwei Kegelschnitte, die drei Puncte gemein haben und in zwei derselben dieselben Tangenten, zusammenfallen. Die durch $\mathfrak{ab}$ und einen neuen gemeinschaftlichen Punct, der nicht im obigen Kegelschnitt liegt, gelegte Ebene schneidet somit die Fläche in einem andern Kegelschnitt. Umgekehrt, wenn zwei Quadriflächen einen und folglich zwei Kegelschnitte gemein haben, so schneiden sich letztere in zwei Puncten in der Durchschnittsgeraden ihrer Ebenen; in diesen Puncten berühren sich beide Flächen.

Der reciproke Satz lautet: Berühren sich zwei Quadriflächen in zwei Puncten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so sind sie in zwei Kegel eingeschrieben, deren Scheitel auf der Durchschnittsgeraden der Ebenen A, B liegt, welche in jenen Puncten berühren, und umgekehrt, sind zwei Quadriflächen in einen und folglich auch in zwei Kegel eingeschrieben, so berühren sie sich in zwei Puncten, u. s. w.

Aus der Combination beider reciproker Sätze folgt: *Gehen zwei Quadriflächen durch zwei ebene Curven, so sind sie auch in zwei Kegel eingeschrieben und umgekehrt.*

Ein etwas allgemeineres Theorem ist das folgende: *Sind zwei Quadriflächen in ein und dieselbe Quadrifläche eingeschrieben, so haben sie zwei Kegelschnitte gemein.* Die beiden Berührungscurven schneiden sich nämlich in zwei Puncten, die auf der gemeinschaftlichen Durchschnittsgeraden ihrer Ebenen liegen. In jedem dieser Puncte berühren sich die drei Quadriflächen, also hat die erwähnte Eigenschaft statt. Die Ebenen der beiden gemeinschaftlichen Kegelschnitte der beiden ersten Flächen gehen durch die beiden Berührungspuncte, das heisst durch die Durchschnittsgerade der Ebenen der Berührungscurven mit der dritten Fläche. Aus dem reciproken Satze findet man ausserdem noch, dass die Scheitel der Kegel, welche den beiden ersten Flächen gleichzeitig umgeschrieben sind, mit den Scheiteln der Kegel in derselben Ebene liegen, welche denselben Flächen separat längs der Berührungscurve mit der dritten Fläche umgeschrieben sind. Schneiden sich umgekehrt zwei Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, so sind sie gleichzeitig in eine unbegrenzte Zahl anderer Quadriflächen eingeschrieben, unter denen zwei Kegel sind; u. s. w. Diese Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung verdankt man Monge, (Correspondance sur l'école polytechnique, T. 2; p. 321 u. f.) Man vergleiche Poncelet, *Propriétés projectives des figures,* Paris 1822. Supplément.

Es seien Q_1, Q_2, Q_3 drei Quadriflächen, die sich in denselben Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ berühren, und A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 die Ebenenpaare, die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen und die Kegelschnitte enthalten, in denen sich bezüglich Q_2 und Q_3, Q_3 und Q_1, Q_1 und Q_2 schneiden. Es seien jetzt A, B die Ebenen, die ebenfalls durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen und in denen die Kegelschnitte liegen, welche Q_1 mit einer beliebigen Quadrifläche Q des Büschels (Q_2, Q_3) gemein hat; dann behaupte ich, dass die Ebenenpaare $(A_2, B_2; A_3, B_3; A, B; \ldots)$ in Involution sind. Eine Ebene A, die durch $\mathfrak{ab}$ beliebig gelegt ist, schneidet nämlich Q_1 in einem Kegelschnitte, welcher in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ alle Flächen des Büschels (Q_2, Q_3) berührt. Die Quadrifläche dieses Büschels also, welche durch einen beliebigen Punct dieses Kegelschnittes geht,

Zwei Quadriflächen schneiden sich im Allgemeinen in einer Raumcurve vierter Ordnung. Haben sie aber eine Gerade (Directrix) gemein, so ist die übrigbleibende Durchschnittscurve eine Raumcurve dritter Ordnung *(Cubische Raumcurve)*, welche jene Gerade in zwei Puncten schneidet. [1]) Diese Curve kann man auch *als Ort der Puncte* erhalten, *in welchen sich drei entsprechende Ebenen dreier projectivischer Ebenenbüschel schneiden.* Die Geraden, in welchen sich die entsprechenden Ebenen des ersten und zweiten Büschels schneiden, bilden ein Hyperboloid, ebenso erzeugen das erste und dritte Büschel ein anderes Hyperboloid, und diese beiden Hyperboloide, welche die Axe des ersten Büschels gemein haben, schneiden sich ausserdem in einer Raumcurve dritter Ordnung.

Der reciproke Satz sagt aus, dass zwei Quadriflächen im Allgemeinen

---

enthält ihn ganz, und diese Quadrifläche schneidet Q_1 in einem neuen Kegelschnitt, der die Ebene B individualisiert. Die Ebenen A, B bestimmen sich eine aus der anderen in der nämlichen Weise, also hat die ausgesprochene Eigenschaft statt. Unter den Flächen des Büschels (Q_2, Q_3) ist es die aus den Ebenen A_1, B_1 zusammengesetzte, ür welche die entsprechenden Ebenen A, B eben mit diesen A_1, B_1 zusammenffallen; folglich sind die drei Ebenenpaare A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 in Involution.

Dieses Theorem führt zu einer Eigenschaft der Flächen beliebiger Ordnung. Gegeben zwei Flächen, die sich in einem Puncte $\mathfrak{a}$ berühren, man sucht die Geraden, welche in diesem Puncte die Schnittcurve der Flächen berühren. Man kann offenbar bei dieser Untersuchung jeder Fläche eine osculierende Quadrifläche durch $\mathfrak{a}$ substituieren, weil, sobald eine Ebene durch $\mathfrak{a}$ die beiden osculierenden Quadriflächen in Curven schneidet, welche mindestens drei Paar gemeinschaftliche zusammenfallende Puncte haben, auch mit den Schnittcurven derselben Ebene mit den gegebenen Flächen eine dreifache Berührung statt hat. Da nun eine osculierende Quadrifläche einer gegebenen Fläche in einem gegebenen Puncte nur sechs Bedingungen unterworfen ist, und folglich noch drei weiteren Bedingungen genügen kann, so dürfen wir annehmen, dass die beiden Quadriflächen sich nicht allein in $\mathfrak{a}$, sondern auch noch in einem anderen Puncte $\mathfrak{b}$ berühren. Nun schneiden sich die beiden Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, deren Ebenen die Tangentialebene in $\mathfrak{a}$ längs den gesuchten Geraden schneiden. (Olivier, *Sur la construction des tangents en un point multiple etc.* Journal de l'école polytechnique, Cah. 21. 1832; p. 307). Hat man endlich drei Flächen, die sich in $\mathfrak{a}$ berühren, so erhält man aus dem oben bewiesenen Satze von den Quadriflächen als Corollar: *Die Tangentenpaare der drei Curven in $\mathfrak{a}$, in welchen sich die Flächen zu zwei und zwei schneiden, sind in Involution.* (Chasles, *Aperçu* Note 10. S. 340 der deutschen Uebersetzung).

[1]) Diese Zerlegung der Curven vierter Ordnung hat statt, wenn die beiden Flächen sich in zwei Puncten berühren, die auf einer gemeinsamen Directrix beider Flächen liegen. Jede Ebene, welche durch diese Gerade geht, schneidet die beiden Quadriflächen in zwei Generatrixen, eine für jede Fläche, und der Ort der Puncte, welche diesen beiden Geraden gemein sind, ist die Curve, welche zugleich mit der gegebenen Directrix den vollständigen Durchschnitt der Oberflächen bildet. Diese Curve muss also von der dritten Ordnung sein, und die Directrix in den beiden Puncten schneiden, in denen die beiden Quadriflächen sich berühren.

in eine Developpable vierter Classe eingeschrieben sind, die von ihren gemeinschaftlichen Tangentialebenen erzeugt wird. Haben aber die beiden Quadriflächen eine Gerade gemein, so haben diejenigen gemeinschaftlichen Tangentialebenen, die nicht durch jene Gerade gehen, als Enveloppe eine Developpable dritter Classe, von der zwei Tangentialebenen durch die genannte Gerade gehen. [1]) Diese abwickelbare Fläche kann auch als *Enveloppe der Ebenen* erhalten werden, *welche durch drei correspondierende Puncte dreier gerader projectivischer Punctreihen hindurchgehen*, die nicht je zwei in derselben Ebene liegen.

CAPITEL VI.

LINEARE FLÄCHENSYSTEME.

41. In derselben Weise wie für die ebenen Curven [2]) beweist man für die Flächen, dass die Punctgruppen, in denen eine beliebige Gerade die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung schneidet, eine Involution des ν-ten Grades bilden. [3]) Diese Involution hat $2(\nu-1)$ Doppelpuncte, folglich hat man den Satz:

In einem Büschel der ν-ten Ordnung gibt es $2(\nu-1)$ Flächen, die eine gegebene Gerade berühren.

---

[1]) Dies ist der Fall, wenn die beiden Flächen sich in zwei Puncten einer gemeinschaftlichen Directrix berühren. Gehen daher zwei Quadriflächen durch dieselbe cubische Raumcurve, so sind sie auch in dieselbe Developpable dritter Classe eingeschrieben und umgekehrt.

Durch einen beliebigen Punct der gemeinsamen Geraden geht eine Generatrix der ersten und eine Generatrix der zweiten Quadrifläche. Die Ebene der beiden Generatrixen hat die Developpable dritter Classe zur Enveloppe. Die Tangentialebenen derselben entsprechen projectivisch den Puncten einer Geraden. Man beachte ausserdem, dass diese Developpable keine Doppeltangentialebene oder Wendeebene haben kann, weil der Punct, in dem eine solche Ebene zwei andere Ebenen schneiden würde, in vier Tangentialebenen läge, was dem widersprechen würde, dass es eine Developpable dritter Classe ist. Die Charakteristiken derselben sind daher (14):

$$\mu=3,\ \nu=3,\ \rho=4,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \varepsilon=1,\ \xi=0,\ \eta=0,\ \theta=0.$$

Man sehe des Verfassers Abhandlung: *Sur les cubiques gauches* (Nouvelles Ann. de Math. 2e. série, T. 1. Paris; 1862).

[2]) *Einleitung*, Nr. 49.

[3]) Umgekehrt gehören die Flächen derselben Ordnung einer einfach unendlichen Reihe, welche von irgend einer Geraden in Punctgruppen in Involution geschnitten werden, zu dem nämlichen Büschel, weil in Gemässheit der Voraussetzung ein Punct des Raumes entweder in einer oder in allen Flächen der Reihe liegt.

Eine Ebene schneidet die Fläche eines Büschels in Curven, die ein anderes Büschel bilden, dessen Basispuncte die Durchschnitte der Transversalebene mit der Basis-Curve des ersten Büschels sind. Nun gibt es in einem ebenen Curvenbüschel ν-ter Ordnung $3(\nu-1)^2$, die einen Doppelpunct haben [1]); man hat folglich den Satz:

In einem Büschel ν-ter Ordnung gibt es $3(\nu-1)^2$ Flächen, welche eine gegebene Ebene berühren.

42. Ich nenne diejenige μ-fach unendliche Reihe von Flächen ν-ter Ordnung *ein lineares System μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung*, welche $\mathfrak{N}(\nu)-\mu$ gemeinschaftlichen Bedingungen in der Art genügen, dass durch μ beliebig im Raume angenommene Puncte nur eine einzige Fläche geht, welche den obengenannten Bedingungen Genüge leistet. [2])

Für $\mu=1, 2, 3$ heisst die Reihe in derselben Folge *Büschel, Netz* und *lineares System* im engeren Sinne. [3])

43. Aus den vorhergehenden Definitionen folgt sofort, dass alle Flächen eines Systemes μ-ter Stufe, welche durch ρ beliebig gegebene Puncte gehen, ein niederes lineares System $(\mu-\rho)$-ter Stufe bilden, welches in dem gegebenen Systeme enthalten ist.

Diejenigen Flächen desselben ersten Systems, welche durch andere ρ' gegebene Puncte gehen, bilden ein zweites niederes lineares System $(\mu-\rho')$-ter Stufe. Haben die beiden Gruppen von ρ und ρ' Puncten σ Puncte gemein, und ist $\rho+\rho'-\sigma<\mu$, so bilden die Flächen, welche durch die $\rho+\rho'-\sigma$ verschiedenen Puncte gehen, ein lineares System $(\mu-\rho-\rho'+\sigma)$-ter Stufe, welches sowohl im Systeme $(\mu-\rho)$-ter Stufe als in dem $(\mu-\rho')$-ter Stufe enthalten ist. Ist aber $\rho+\rho'-\sigma=\mu$, so bestimmen die $\rho+\rho'-\sigma$ verschiedenen Puncte eine einzige Fläche, welche den beiden niederen Systemen $(\mu-\rho)$-ter und $(\mu-\rho')$-ter Stufe gemein ist. [4])

Ein lineares System der μ ten Stufe ist durch $\mu+1$ Flächen derselben Ordnung bestimmt, welche nicht ein und demselben linearen System niederer Stufe angehören. Es seien nämlich $U_1, U_2, \ldots, U_{\mu+1}$ die $\mu+1$ gegebenen Flächen, und man suche die Fläche des Systems, welche durch die Puncte $\mathfrak{o}_1\ \mathfrak{o}_2, \mathfrak{o}_3, \ldots, \mathfrak{o}_{\mu-1}, \mathfrak{o}_\mu$ geht. Die Flächenpaare $(U_1U_2), (U_1U_3)$,

---

1) *Einleitung*, Nr. 88.

2) Jonquières, *Études sur les singularités des surfaces algébriques* (Journal de Liouville, 2e (Exp.) série. T. 7; 1862).

3) Die Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, bilden ein Büschel; die Ebenen, die sämmtlich durch einen festen Punct gehen, bilden ein Netz (Bündel), und alle Ebenen des Raumes bilden ein lineares System im engern Sinne

4) Hieraus ergibt sich zum Beispiel, dass zwei in einem Netz enthaltene Büschel eine Fläche gemein haben; dass ein Büschel und ein Netz, die in einem linearen Systeme im engern Sinne enthalten sind, eine Fläche gemein haben; dass zwei Netze, die in einem linearen Systeme im engern Sinne sich befinden, eine unbegrenzte Zahl von Flächen gemein haben, die ein Büschel bilden; u. s. w.

. . . , $(U_1 U_\mu)(U_1 U_{\mu+1})$, individualisieren μ Büschel, in denen es μ Flächen gibt, die sämmtlich durch $\mathfrak{o}_\mu$ gehen. Nehmen wir an, dass diese μ Flächen ein lineares System der $(\mu-1)$-ten Stufe bestimmen, so ist diejenige Fläche dieses Systems, welche ausserdem noch durch $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_{\mu-1}$ geht, die verlangte. Also ist der Satz für μ bewiesen, wenn er für $\mu-1$ besteht, er findet aber statt für $\mu=1$, folglich gilt er allgemein. [1])

---

[1]) Sind

$$U_1=0,\ U_2=0, \ldots, U_\mu=0,\ U_{\mu+1}=0$$

die Gleichungen der gegebenen Flächen, so werden alle Flächen des Systems durch die Gleichung dargestellt:

$$\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 + \ldots + \varkappa_\mu U_\mu + \varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1} = 0$$

wo die $\varkappa$ unbestimmte Parameter sind. Diese Gleichung zeigt, dass eine beliebige Fläche des Systems ein Theil des Büschels ist, das von zwei Flächen gebildet wird, deren eine dem niederen Systeme $(\rho-1)$-ter Stufe

$$\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 + \ldots + \varkappa_\rho U_\rho = 0$$

angehört, und die andern dem linearen Systeme $(\mu-\rho)$-ter Stufe

$$\varkappa_{\rho+1} U_{\rho+1} + \varkappa_{\rho+2} U_{\rho+2} + \ldots + \varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1} = 0.$$

Theilt man also die gegebenen Flächen in zwei Gruppen, die eine von ρ die andere von $\mu-\rho+1$ Flächen, die zwei lineare niedere Systeme $(\rho-1)$-ter und $(\mu-\rho)$-ter Stufe individualisieren, und man nimmt beliebig aus jedem dieser niederen Systeme eine Fläche als ein Büschel bestimmend an, so gehören sämmtliche Flächen des Büschels dem vollständigen Systeme an, und umgekehrt können alle Flächen des vollständigen Systems in dieser Weise erhalten werden. Macht man zum Beispiel $\rho=1$, so erhält man den Satz, dass eine beliebige Fläche des Systems die Fläche $U_1=0$ in einer Curve schneidet, durch welche eine Fläche des niedern Systems geht, das durch $U_2=0, U_3=0, \ldots U_{\mu+1}=0$ bestimmt ist.

Aus dem Vorhergehenden resultiert ausserdem noch: Wenn man in einem gegebenen linearen Systeme $\rho+1$ Flächen, die nicht demselben Systeme $(\rho-1)$-ter Stufe angehören, annimmt, so dass sie ein System der ρ-ten Stufe bestimmen, so gehören auch alle Flächen dieses Systems dem gegebenen Systeme an.

Es ist auch sogleich klar, dass, wenn die Flächen, welche ein lineares System individualisieren, einen Punct gemein haben, derselbe in allen Flächen des Systems liegt. So gehen für $\mu=1$ die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung sämmtlich durch dieselbe Curve der Ordnung ν^2, und folglich schneiden sich die Flächen eines linearen Systems μ-ter Stufe, die durch $\mu-1$ beliebig gegebene Puncte gehen, längs einer Curve ν^2-ter Ordnung. Für $\mu=2$ erhält man: Die Flächen eines Netzes haben im Allgemeinen ν^3 gemeinschaftliche Puncte, also schneiden sich die Flächen eines Systems μ-ter Stufe, die durch $\mu-2$ beliebig gegebene Puncte gehen in andern $\nu^3-\mu+2$ Puncten. (Wir sagen *im Allgemeinen*, weil die Basis eines Netzes auch eine Curve sein kann, die dann offenbar nothwendig von niederer Ordnung als ν^2 sein muss. So bilden zum Beispiel die Quadriflächen die durch sieben gegebene Puncte gehen ein Netz, und haben im Allgemeinen nur noch einen achten Punct gemein, wenn aber diese sieben Puncte auf einer cubischen Raumcurve liegen, so liegt diese auch auf allen Quadriflächen des Netzes.)

44. Zwei lineare Systeme derselben μ-ten Stufe heissen projectivisch, wenn die Flächen des einen den einzelnen Flächen des andern in der Art entsprechen, dass den Flächen des ersten Systems, welche ein niederes System $(\mu-\rho)$-ter Stufe bilden im zweiten Systeme ebenfalls Flächen entsprechen, die ein anderes System derselben $(\mu-\rho)$-ten Stufe bilden. Die beiden niederen sich entsprechenden Systeme sind offenbar projectivisch.

Da ein Büschel eine einfach unendliche Reihe von Elementen ist, so ist die gegenseitige Projectivität zweier Büschel durch drei Paare entsprechender Flächen, die beliebig gegeben oder festgelegt sind, bestimmt. [1]) Nehmen wir im Allgemeinen für zwei lineare Systeme μ-ter Stufe an, dass den Flächen $U_1, U_2, \ldots, U_{\mu+1}$ des ersten Systems, die nicht demselben niedern Systeme angehören, der Reihe nach die Flächen $V_1, V_2, \ldots, V_{\mu+1}$ des zweiten Systems, die ebenfalls nicht zu demselben niederen Systeme gehören, entsprechen und lassen wir, unter $\mathbf{U}_\rho$ eine Fläche des Büschels $(U_\rho U_{\mu+1})$ und unter $\mathbf{V}_\rho$ eine solche des Büschels $(V_\rho V_{\mu+1})$ verstanden, die Flächen $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \ldots, \mathbf{U}_\mu$ bezüglich den Flächen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_\mu$ entsprechen, so ist die projectivische Beziehung zwischen den beiden gegebenen Systemen vollständig bestimmt, das heisst, einer beliebigen Fläche des ersten Systemes entspricht eine vollständig bestimmte Fläche des zweiten. Denn eine beliebige Fläche des ersten Systems bildet einen Theil (43) des Systems niederer $(\mu-1)$-ter Stufe, das durch Oberflächen gebildet wird, die bezüglich zu den Büscheln $(U_1, U_{\mu+1}), (U_2 U_{\mu+1}) \ldots, (U_\mu U_{\mu+1})$ gehören. Es seien diese Flächen die oben durch $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_\mu$ bezeichneten. Die Büschel $(\mathbf{U}_\rho \mathbf{U}_\sigma), (U_\rho U_\sigma)$, die zu demselben Netze $(U_\rho U_\sigma U_{\mu+1})$ gehören, haben eine Fläche gemein, der diejenige Fläche entspricht, welche die Büschel $(\mathbf{V}_\rho \mathbf{V}_\sigma), (V_\rho V_\sigma)$ gemein haben. Auf diese Weise besteht für die niederen Systeme $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots \mathbf{U}_\mu), (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots \mathbf{V}_\mu)$ dieselbe Beziehung, wie für die gegebenen Systeme μ-ter Stufe. Der Satz gilt also für die Systeme

---

Da ein Netz durch drei Flächen individualisiert wird, so gehen durch ν^3 gemeinschaftliche Puncte dreier Flächen ν-ter Ordnung eine unbegrenzte Zahl von Flächen, die ein Netz bilden. Eine Fläche der ν-ten Ordnung ist durch $\mathfrak{N}(\nu)$ Puncte gegeben, also geht durch $\mathfrak{N}(\nu)-2$ gegebene Puncte ein Netz von Flächen derselben Ordnung; drei beliebige dieser Flächen schneiden sich in ν^3 Puncten, die gegebenen eingeschlossen, und durch diese ν^3 Puncte geht eine unbegrenzte Zahl von Flächen derselben Ordnung, nämlich die, welche die gegebenen Puncte enthalten. Folglich schneiden sich alle Flächen ν-ter Ordnung, welche $\mathfrak{N}(\nu)-2$ gegebene Puncte enthalten, in andern $\nu^3-\mathfrak{N}(\nu)+2$ Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sind. $\mathfrak{N}(\nu)-2$ beliebig gegebene Puncte bestimmen daher alle Basispuncte eines Flächennetzes ν-ter Ordnung. Lamé, *Examen des différentes méthodes etc.* Paris 1848. — Pluecker, *Recherches sur les surfaces algébriques.* (Annales de Gergonne. T. 19).

[1]) *Einleitung*, Nr. 8.

μ-ter Stufe, wenn er für Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe statt hat. Er ist aber für Büschel bewiesen, das heisst für $\mu=1$, folglich besteht er allgemein. [1])

45. Ein Ebenennetz besteht aus allen Ebenen, welche durch ein und denselben Punct *(Mittelpunct)* gehen. *Strahlen* des Netzes heissen die Geraden die durch den Mittelpunct gehen.

Zwei Ebenennetze heissen *reciprok*, wenn die Ebenen des einen den Strahlen des andern einzeln entsprechen, in der Art, dass den Ebenen des einen Netzes, die ein Büschel bilden, das heisst, die durch ein und denselben Strahl gehen, im andern Netze die Strahlen eines Büschels entsprechen, das heisst die Strahlen, die in ein und derselben Ebene durch denselben Punct gehen. Das Ebenenbüschel und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

Ebene Punctreihe ist der Complex aller an Zahl zweimal unendlicher Puncte einer Ebene. *Strahlen* einer ebenen Punctreihe sind die Geraden, die sie enthält.

Zwei ebene Punctreihen heissen *reciprok*, wenn den Puncten der einen die Strahlen der andern in der Art entsprechen, dass den Puncten der einen Ebene, die eine gerade Punctreihe bilden, das heisst sämmtlich auf einem Strahle liegen, in der andern Ebene die Strahlen eines Büschels, das heisst, die Strahlen entsprechen, die sich in einem Puncte kreuzen. Die gerade Punctreihe und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

46. Gegeben zwei reciproke Ebenennetze deren Mittelpuncte $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ sind. Man verlangt den Ort P der Puncte, in welchen die Strahlen des ersten Netzes die entsprechenden Ebenen des zweiten Netzes schneiden. Eine Ebene A die beliebig durch $\mathfrak{s}$ gelegt ist, enthält ein Strahlenbüschel des ersten Netzes und schneidet die entsprechende Ebene des Netzes $(\mathfrak{s}_1)$ in einem zweiten Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct der Punct $\mathfrak{a}$ ist, in welchem die Ebene A von dem Strahle a_1 getroffen wird, der ihr im Netze $(\mathfrak{s}_1)$ entspricht. Da beide Strahlenbüschel projectivisch sind, so erzeugen sie einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ geht, das heisst, jede beliebige Ebene durch $\mathfrak{s}$ schneidet P in einem Kegelschnitte. Da der Punct $\mathfrak{a}$ auf dem Kegelschnitte liegt, so geht die Ebene A_1, welche dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{a} \equiv a$ entspricht, durch $\mathfrak{a}$; dieser Punct ist aber auch der Durchschnitt der Ebene A mit dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a} \equiv a_1$, und folglich ist die Fläche P auch der Ort der Puncte,

---

1) Angenommen den Flächen

$$U_1=0,\ U_2=0, \ldots,\ U_{\mu+1}=0;\ \mathfrak{U}_1 \equiv U_1+U_{\mu+1}=0,\ \mathfrak{U}_2 \equiv U_2+U_{\mu+1}=0, \ldots,$$
$$\mathfrak{U}_\mu \equiv U_\mu+U_{\mu+1}=0$$

des ersten Systems entsprächen die Flächen

$$V_1=0,\ V_2=0, \ldots,\ V_{\mu+1}=0;\ \mathfrak{V}_1 \equiv V_1+V_{\mu+1}=0,\ \mathfrak{V}_2 \equiv V_2+V_{\mu+1}=0, \ldots,$$
$$\mathfrak{V}_\mu \equiv V_\mu+V_{\mu+1}=0$$

des zweiten, so sind zwei beliebige entsprechende Flächen durch die Gleichungen dargestellt:

$$\begin{cases} \varkappa_1 U_1+\varkappa_2 U_2+\ldots+\varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1}=0, \\ \varkappa_1 V_1+\varkappa_2 V_2+\ldots+\varkappa_{\mu+1} V_{\mu+1}=0. \end{cases}$$

in denen die Strahlen des zweiten Netzes die entsprechenden Ebenen des ersten treffen. Man kann daher in derselben Art beweisen, dass P auch von jeder Ebene, die durch $\mathfrak{s}_1$ geht, in einem Kegelschnitte getroffen wird. Die Fläche kann nicht mehr als zwei Puncte mit einer beliebigen Geraden g gemein haben. Denn der Kegelschnitt, welcher P und der Ebene $\mathfrak{s}g$ gemein ist, schneidet g nur in zwei Puncten. Folglich ist P eine Fläche zweiter Ordnung.

Ein Strahl g des ersten Netzes trifft P ausser in $\mathfrak{s}$ noch in einem zweiten Puncte, dem Durchschnittspuncte von g mit der entsprechenden Ebene G_1 des zweiten Netzes. Dieser zweite Punct ist dem Puncte $\mathfrak{s}$ unendlich nahe, wenn G_1 durch $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ geht, folglich entspricht dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ des zweiten Netzes die Tangentialebene von P in $\mathfrak{s}$, und dem analog entspricht die Tangentialebene in $\mathfrak{s}_1$ dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ des ersten Netzes.

Es sei S die Tangentialebene in $\mathfrak{s}$. Dann bilden die Strahlen, die in dieser Ebene durch $\mathfrak{s}$ gehen, ein Büschel und entsprechen den Ebenen, die durch $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ gehen. Diese scheiden S in Geraden, die ein Büschel bilden. Die Büschel sind projectivisch und haben entweder zwei reelle verschiedene Strahlen gemein, oder zwei zusammenfallende gemeinsame Strahlen, oder keine zusammenfallende Strahlen, oder es fallen endlich alle Strahlen zusammen. Im ersten Falle ist die Fläche windschief, im zweiten ist sie ein Kegel, im dritten ist sie eine Fläche mit elliptischen Puncten (25). Im letzten Falle besteht die Fläche P aus der Ebene S und einer zweiten Ebene. [1])

47. Umgekehrt beweist man leicht, dass jede beliebige gegebene Fläche zweiter Ordnung auch auf unendlich verschiedene Arten mittelst zweier reciproker Ebenennetze erzeugt werden kann, deren Mittelpuncte zwei beliebig auf ihr angenommene Puncte sind. Und hieraus ergibt sich die Construction einer Quadrifläche von der neun Puncte gegeben sind. [2])

Analog kann man den Satz aussprechen. Sind zwei ebene Punctreihen reciprok, so ist die Enveloppe der Ebenen, die durch einen beliebigen Punct der einen Ebene und den entsprechenden Strahl der anderen Ebene bestimmt werden, eine Oberfläche zweiter Classe. Eine Fläche zweiter Classe kann umgekehrt immer auf unendlich verschiedene Arten mittelst zwei beliebiger von ihren Tangentialebenen erzeugt werden, die reciproke ebene Punctreihen sind.

---

[1]) Seidewitz, *Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde* (Grunert's Archiv für Math. und Phys. Bd. 9 S. 187). — Man vergleiche auch Reye, *Geometrie der Lage* (Hannover; 1868) 2. Abth. S. 26.

[2]) Schroeter, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova* (Vratislaviae; 1862).

CAPITEL VII.

EINHÜLLENDE FLÄCHEN.

48. Hat man eine einfach unendliche Reihe von Flächen ν-ter Ordnung, die $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen sind, so kann man diese Flächen als ebensoviele Lagen einer Fläche betrachten, welche gleichzeitig die Lage und die Gestalt im Raume nach einem gegebenen Gesetze verändert. [1])

Es seien $S, S', S'', S''', \ldots$ aufeinanderfolgende Flächen der Reihe oder auch aufeinanderfolgende Lagen der variablen Fläche und $\mathbf{S}$ der Ort aller zu $SS', S'S'', S''S''', \ldots$ analogen Curven. Die Fläche $\mathbf{S}$ wird dann durch S' längs der beiden unmittelbar folgenden unendlich nahen Curven $SS', S'S''$ geschnitten. Dieser Eigenschaft halber heissen die Flächen S *eingehüllte Flächen;* $\mathbf{S}$ heisst die *einhüllende Fläche* und der Curve, in welcher sich zwei unmittelbar folgende eingehüllte Flächen schneiden, das heisst der Berührungscurve zwischen der einhüllenden Fläche und einer der eingehüllten Flächen gibt man den Namen *Charakteristik* der Einhüllenden. [2])

Sind die Flächen S Ebenen, so ist $\mathbf{S}$ eine Developpable und ihre Charakteristiken sind die Generatrixen (7).

49. Die Fläche $\mathbf{S}$ ist offenbar der Ort der Puncte, durch welche zwei unmittelbar folgende Eingehüllte gehen. Daher ist jeder Punct, in dem sich zwei, drei, ... verschiedene Paare successiver eingehüllter Flächen schneiden, das heisst zwei, drei, ... verschiedene Charakteristiken, für $\mathbf{S}$ respective ein Doppelpunct (Biplanarpunct), ein dreifacher Punct (Triplanarpunct) ... Die Fläche $\mathbf{S}$ hat also im Allgemeinen eine Doppel- oder Knotencurve, den Ort der Puncte, in denen sich zwei nicht unmittelbar folgende Charakteristiken schneiden, und auf dieser Curve gibt es eine bestimmte Zahl von dreifachen Puncten.

Ebenso ist ein Punct für $\mathbf{S}$ ein Uniplanarpunct, wenn sich in ihm zwei unmittelbar folgende Charakteristiken schneiden. Die Fläche besitzt folglich eine Cuspidalcurve, den Ort der Durchschnittspuncte aufeinanderfolgender Charakteristiken. Diese Curve wird von jeder Charakteristik in dem Puncte berührt, den dieselbe mit der nächstfolgenden Charakteristik gemein hat.

Die Cuspidalcurve ist der Ort der Puncte, in denen sich drei aufeinanderfolgende Eingehüllte treffen. Es können darunter eine bestimmte Zahl

---

[1]) In der Art, dass die successiven Lagen der variablen Fläche von den Werthen abhängen, die ein veränderlicher Parameter annehmen kann.

[2]) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie,* §. VI.

von Puncten sein, von denen jeder in vier aufeinanderfolgenden Eingehüllten liegt, das heisst in drei unmittelbar folgenden Charakteristiken. Diese Puncte würden offenbar Spitzen der Cuspidalcurve sein und würden wegen des Durchschnitts der ersten mit der dritten Charakteristik auch der Doppelcurve angehören. Die Puncte, in denen sich zwei unmittelbar folgende Charakteristiken und eine andere nicht unmittelbar folgende schneiden, sind Spitzen der Doppelcurve und liegen auch in der Cuspidalcurve.

50. Um ein Beispiel zu geben, möge die Reihe der Flächen S so beschaffen sein, dass durch einen beliebigen Punct des Raumes zwei dieser Flächen gehen. Dann ist die Fläche **S** der Ort der Puncte, für welche die beiden Flächen S zusammenfallen. Da jeder Punct der Fläche **S** auf einer einzigen eingehüllten Fläche liegt, und zwar auf der, welche **S** im besagten Puncte berührt, so folgt, dass alle gemeinschaftlichen Puncte zwischen **S** und einer Eingehüllten Berührungspuncte dieser beiden Flächen sind. Aber die Berührungscurve zwischen **S** und einer Fläche S ist der Durchschnitt dieser letztern mit der nächstfolgenden Eingehüllten, und ist daher eine Curve ν^2-ter Classe. **S** ist also eine Fläche 2ν-ter Ordnung. Auf derselben existiert weder eine Doppelcurve, noch eine Cuspidalcurve, weil kein Punct des Raumes nur in drei Flächen S liegt.

Drei eingehüllte Flächen schneiden sich in ν^3 Puncten, die nothwendig allen Flächen S angehören, da sie nicht in einer endlichen Zahl von Flächen, die grösser als 2 ist, liegen können. In jedem dieser Puncte wird **S** von der Ebene berührt, die in ihm eine der eingehüllten Flächen berührt. Folglich sind alle diese Puncte für die Fläche **S** Doppelpuncte, und durch dieselben gehen nicht blos die Flächen S, sondern auch alle Berührungscurven der Fläche **S** mit den Eingehüllten.

Da die Berührungscurve zwischen **S** und der Eingehüllten S der Durchschnitt der letzteren Curve mit der nächstfolgenden Eingehüllten ist, so ist die genannte Curve — das heisst eine beliebige Charakteristik von **S** — die Basis eines Flächenbüschels ν-ter Ordnung (20). Die Berührungscurven zweier beliebiger Eingehüllten haben ν^3 Puncte gemein, und folglich hat die Fläche ν-ter Ordnung, die durch die erste Curve und einen beliebigen Punct der zweiten geht, mit letzterer ν^3+1 Puncte gemein, das heisst, sie enthält sie vollständig. Zwei nicht unmittelbar folgende Charakteristiken der Fläche **S** liegen also auf ein und derselben Fläche ν-ter Ordnung.

Lässt man durch eine Charakteristik von **S** eine Fläche ν-ter Ordnung gehen, so schneidet diese **S** in einer andern Curve ν^2-ter Ordnung. Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct dieser Curve. Dann enthält die Oberfläche ν-ter Ordnung, die durch die gegebene Charakteristik und durch $\mathfrak{x}$ geht, auch die Charakteristik, auf der $\mathfrak{x}$ liegt, und jede Fläche ν-ter Ordnung also, die durch eine Charakteristik gelegt ist, schneidet **S** längs einer andern Charakteristik.

Alle analogen Flächen, deren jede **S** in zwei Charakteristiken schneidet, gehen durch die ν^3 Doppelpuncte der einhüllenden Fläche. Diese Puncte, entstan-

den durch den Durchschnitt dreier Flächen ν-ter Ordnung, bilden die Basis eines Netzes (43). Umgekehrt schneidet jede Fläche des Netzes **S** in zwei Charakteristiken. Denn denken wir uns eine solche Fläche durch zwei Puncte, die beliebig auf **S** angenommen sind, bestimmt, so liegen die beiden Charakteristiken, die durch diese Puncte gehen, auf derselben Fläche ν-ter Ordnung, folglich u. s. w. Zu dem Netze gehören auch die Eingehüllten S. Diese sind davon diejenigen Flächen, welche **S** in zwei unmittelbar folgenden Charakteristiken schneiden.

CAPITEL VIII.

WINDSCHIEFE FLÄCHEN.

51. Eine Fläche heisst eine *Regelfläche*, wenn sie durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann. Eine Regelfläche ist also eine einfach unendliche Reihe von Geraden *(Generatrixen)*.

Liegen zwei unmittelbar folgende Generatrixen stets in derselben Ebene, so bilden die Durchschnitte der aufeinanderfolgenden Generatrixen eine Curve, deren Tangenten eben diese Generatrixen sind. Die Regelfläche ist also in diesem Falle eine *Developpable* (abwickelbare Fläche).

Die Regelflächen, die nicht abwickelbar sind, heissen *windschief (gobbe, gauches, skew)* oder *geradlinig*, [1]) das heisst eine windschiefe Fläche ist ein Ort, der durch eine Gerade erzeugt wird, von der zwei unmittelbar folgende Lagen im Allgemeinen nicht mehr in derselben Ebene enthalten sind.

Die windschiefe Fläche der zweiten Ordnung lässt zwei Systeme geradliniger Generatrixen zu, das heisst zwei einfach unendliche Reihen von Geraden (24).

52. Es sei S eine gegebene windschiefe Fläche, g eine ihrer Generatrixen, $\mathfrak{m}$ ein Punct beliebig auf g gelegen; es seien ferner g', g'' die auf g folgenden Generatrixen. Die Gerade g ist offenbar eine der beiden Osculierenden der Fläche in $\mathfrak{m}$ (16) und es geht folglich die Tangentialebene durch g, was auch der Berührungspunct $\mathfrak{m}$ ist. Die Gerade, welche durch $\mathfrak{m}$ geht und g' und g'' schneidet, enthält drei unendlich nahe Puncte der Fläche, ist also die zweite Osculierende und bestimmt in Verbindung mit g die Berührungsebene M in $\mathfrak{m}$.

Umgekehrt berührt jede beliebig durch g gelegte Ebene M die Fläche

---

1) Bellavitis, *Geometria descrittiva* (Padova 1851; p. 90).

in einem Puncte dieser Generatrix. Die Gerade, welche in der Ebene M so gezogen ist, dass sie g' und g'' schneidet, trifft g im Berührungspuncte $\mathfrak{m}$. [1])

Es ist auf diese Weise klar, dass längs der Generatrix g jeder Punct eine einzige Ebene M individualisiert, und umgekehrt jede Ebene M nur einen einzigen Punct $\mathfrak{m}$. Die Reihe der Puncte $\mathfrak{m}$ und das Büschel der Ebenen M sind also zwei projectivische Gebilde, und es ist folglich das Doppelverhältniss von vier Tangentialebenen, die durch dieselbe Generatrix gehen, gleich dem Doppelverhältniss der vier Berührungspuncte. [2])

53. Zwei windschiefe Flächen mögen jetzt eine gemeinschaftliche Generatrix g haben. Eine durch g beliebig gelegte Ebene M berührt die eine Fläche in einem Puncte $\mathfrak{m}$ und die andere in einem zweiten Puncte $\mathfrak{m}'$. Lässt man M variieren, so erzeugen die beiden Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zwei projectivische Punctreihen, bei denen zwei Puncte mit ihren bezüglich entsprechenden Puncten zusammenfallen; die beiden Flächen berühren sich folglich in zwei Puncten der gemeinschaftlichen Generatrix. Wenn sie sich nun in drei Puncten von g berührten, so fielen die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ immer zusammen, das heisst, die beiden Flächen würden sich längs der ganzen gemeinsamen Generatrix berühren. [3])

54. Ist eine windschiefe Fläche von der Ordnung ν, so trifft eine beliebige Gerade ν Generatrixen und jede von ihnen bestimmt mit jener Geraden eine Tangentialebene. Es gibt also ν Tangentialebenen, die man durch die beliebige Gerade legen kann, das heisst, eine windschiefe Fläche ν-ter Ordnung ist auch ν-ter Classe und umgekehrt. [4]) Um die Begriffe Ordnung und Classe auf einmal zu umfassen, sagen wir, eine windschiefe Fläche ist vom *ν-ten Grade,* wenn eine beliebige Gerade ν Generatrixen trifft.

55. Eine Ebene M, die eine gegebene windschiefe Fläche ν-ten Grades in einem Puncte $\mathfrak{m}$ berührt, schneidet die Fläche in einer geradlinigen Generatrix g und einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung. Diese trifft g in $\mathfrak{m}$ und in $\nu-2$ anderen Puncten. Jeder derselben ist ein Doppelpunct der Fläche, da er kein wirklicher Berührungspunct der Ebene mit der Fläche sein kann, und verändert sich nicht, wie auch die Ebene M um g rotiert. Die Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung ist in der That der Ort der Puncte, in denen die Ebene

---

1) Die Fläche S und das durch die Directrixen g, g', g'' bestimmte Hyperboloid osculieren sich längs der Geraden g. In jedem Puncte derselben haben sie die nämliche Tangentialebene und die nämlichen Osculierenden. Jedes andere Hyperboloid, das durch die Geraden g, g' geht, hat längs g mit S einen Contact erster Ordnung. (Hachette, *Supplément à la géométrie descriptive de Monge,* 1811.)

2) Chasles, *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite etc.* (Correspondence mathématique et physique de Bruxelles, T. 11).

3) Hachette, *a. a. O.; — Traité de géométrie descriptive,* Paris 1822. p. 84.

4) Cayley, *On the theory of skew surfaces* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, T. 7; 1852).

M von Generatrixen ausser g geschnitten wird. Die auf g folgende Generatrix trifft M in dem auf den Berührungspunct $\mathfrak{m}$ der Tangentialebene mit der Fläche unmittelbar folgenden Puncte der Curve; durch die anderen $\nu-2$ gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Geraden g mit der Curve gehen also ebensoviele nicht unmittelbar folgende Generatrixen. Ein Punct, in dem sich zwei getrennte Generatrixen schneiden, ist für die Fläche ein Doppelpunct, weil man, wenn man, wie es oben (52) geschehen ist, die auf obengenannte Generatrixen jedesmal folgenden Generatrixen betrachtet, findet, dass in diesem Puncte die Fläche zwei verschiedene Tangentialebenen zulässt. Oder man kann auch darauf Rücksicht nehmen, dass der Durchschnittspunct zweier Generatrixen, die nicht unmittelbar aufeinander folgen, zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte der Fläche mit jeder beliebigen Geraden darstellt, die durch ihn gezogen ist, da diese Gerade nicht mehr als $\nu-2$ andere Generatrixen schneiden kann. Die Fläche hat daher eine Doppelcurve, die von jeder Generatrix in $\nu-2$ Puncten getroffen wird. [1]) In jedem Puncte dieser Curve hat die Fläche zwei Tangentialebenen die respective durch die beiden Generatrixen gehen, welche sich in dem Puncte kreuzen und sich in einer Geraden schneiden, welche die Tangente der Doppelcurve ist.

Aus der reciproken Eigenschaft zieht man den Satz, dass die Ebenen, die zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen enthalten, zur Enveloppe eine doppelt berührende — der windschiefen Fläche doppelt umgeschriebene — Developpable haben, die $\nu-2$ Tangentialebenen besitzt durch jede Generatrix der gegebenen Fläche. Jede Ebene, die zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen enthält, berührt die gegebene Fläche in zwei Puncten, nämlich in denjenigen, in welchen die vorgedachten Generatrixen von der Berührungsgeneratrix zwischen der doppeltberührenden Developpablen und besagter Ebene geschnitten werden.

56. Eine windschiefe Fläche hat im Allgemeinen einige singulären Generatrixen, die von den unmittelbar folgenden Generatrixen getroffen werden. Treffen sich zwei unmittelbar folgende Generatrixen g, g', so berührt die Ebene, die sie enthält, die Fläche in allen Puncten von g, wie es bei den Developpablen eintritt. Diese Ebene kann also als eine stationäre Ebene angesehen werden, die eine unbegrenzte Zahl — parabolischer — Berührungspuncte besitzt, die längs einer Geraden continuierlich aufeinander folgen. Jede Gerade, die in dieser Ebene liegt, ist Tangente der Oberfläche in einem Puncte der Generatrix g, und der Punct gg' kann als ein stationärer Punct mit unendlich vielen Tangentialebenen angesehen werden, die sämmtlich durch g gehen; jede Gerade, die durch den Punct gg' geht, ist Tangente der Fläche in einer Ebene, welche die Gerade g enthält. Die Zahl dieser

---

1) Cayley, *a. a. O.* An Stelle der $\nu-2$ Doppelpuncte auf jeder Generatrix kann man in gewissen Fällen eine äquivalente Zahl dreifacher, vierfacher .... Puncte haben; das heisst die Doppelcurve kann durch eine äquivalente Curve von höherer Multiplicität ersetzt werden.

singulären Puncte und Ebenen ist für eine Fläche gegebener Ordnung endlich, und folglich lässt dieselbe weder eine Cuspidalcurve noch eine osculierende Developpable zu. Das heisst, der durch eine *beliebige* Ebene erzeugte Schnitt hat keine Spitze, und der umgeschriebene Kegel, dessen Scheitel ein *beliebiger* Punct ist, hat keine Wendeebenen.

In gewissen Fällen hat die Fläche auch *Doppelgeneratrixen.* Eine solche repräsentiert zwei zusammenfallende Generatrixen für jede Ebene, die durch sie hindurchgeht. Jede Gerade, die sie schneidet, trifft im Schnittpuncte die Fläche in zwei zusammenfallenden Puncten.

Die Classe eines umgeschriebenen Kegels ist (38) gleich der der gegebenen Fläche, das heisst gleich ν. Ist daher ∂ die Zahl der Bitangentialebenen des Kegels, das heisst die Zahl der Ebenen, die durch den Scheitel gehen und zwei Generatrixen der Fläche enthalten, so ist die Ordnung des Kegels gleich $\nu(\nu-1)-2\partial$. Aber die Ordnung des Kegels ist offenbar gleich der Classe der Curve, die man erhält, wenn man die windschiefe Fläche durch eine Ebene schneidet, die durch den Kegelscheitel geht. Die Classe dieser Curve ist $\nu(\nu-1)-2\delta$, wo δ die Zahl der Doppelpuncte derselben ist. Folglich hat man $\partial=\delta$, das heisst, *die Classe der doppeltberührenden Developpablen einer windschiefen Fläche ist gleich der Ordnung der Doppelcurve.* [1])

57. Zwei krumme Linien — ebene oder Raumcurven — heissen *projectivische krumme Punctreihen,* wenn die Puncte der einen den Puncten der anderen einzeln in der Art entsprechen, dass man die beiden Curven sich gleichzeitig durch die Bewegung zweier Puncte erzeugt denken kann und dabei einer beliebigen Lage des ersten oder zweiten Mobils nur eine einzige Lage des zweiten oder des ersten Mobils entspricht.

Wir nehmen jetzt an, in zwei Ebenen P, P' seien zwei projectivische krumme Punctreihen gegeben; es sei ν' die Ordnung der ersten, δ' die Zahl der Doppelpuncte mit verschiedenen Tangenten, und $\varkappa'$ die Zahl der Doppelpuncte mit zusammenfallenden Tangenten — Spitzen —; ν'', δ'', $\varkappa''$ die analogen Zahlen für die zweite Curve. [2]) Was ist dann der Grad der windschiefen Fläche, die der Ort der Geraden ist, welche zwei entsprechende Puncte $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ der beiden Curven verbindet? Das heisst, wie viele Gerade $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ werden von einer beliebigen Geraden r geschnitten? Eine beliebig durch r gelegte Ebene schneidet die erste Curve in ν' Puncten $\mathfrak{x}'$, denen ebensoviel Puncte $\mathfrak{x}''$ entsprechen, die im Allgemeinen in ν' verschiedenen Ebenen des Büschels (r) liegen. Eine beliebige Ebene durch r schneidet umgekehrt die zweite Curve in ν'' Puncten $\mathfrak{x}''$, denen ν'' Puncte $\mathfrak{x}'$ entsprechen, die in ebensovielen Ebenen des zweiten Büschels (r) liegen. Jeder Lage der Ebene $r\mathfrak{x}'$, sieht man also, entsprechen ν' Lagen der Ebene $r\mathfrak{x}''$, und jeder Lage der Ebene $r\mathfrak{x}''$ in ähnlicher Weise ν'' Lagen der Ebene $r\mathfrak{x}'$.

---

1) Cayley, *a. a. O.*

2) Ist darunter ein ρ-facher Punct, so zählt dieser für $\frac{\rho(\rho-1)}{1\,.\,2}$ Doppelpuncte.

Doch gibt es $\nu' + \nu''$ Fälle, dass zwei entsprechende Ebenen rx', rx'' zusammenfallen. Durch r gehen also $\nu' + \nu''$ Ebenen, von denen jede zwei entsprechende Puncte beider Curven verbindet, und es ist demnach der Grad der windschiefen Fläche, welche der Ort der Geraden $x'x''$ ist, gleich $\nu' + \nu''$. — Offenbar verändern sich der Beweis und die sonstigen Schlüsse nicht im Mindesten, wenn man an Stelle der beiden ebenen Curven zwei Raumcurven oder eine Raumcurve und eine ebene Curve annimmt, deren Ordnungszahlen bezüglich ν' und ν'' sind.

Die Curve (ν'') trifft die Ebene P' in ν'' Puncten x'' und die Geraden, welche diese Puncte mit den entsprechenden Puncten x' verbinden, sind ebensoviele Generatrixen der Fläche. Da die Ebene P' ν'' Generatrixen enthält, so ist sie für ν'' Puncte — einen für jede Generatrix — Tangentialebene, und der durch sie erzeugte Schnitt der Fläche besteht aus diesen ν'' Geraden und der Curve (ν'). Dieser Schnitt hat

$$\nu'\nu'' + \frac{\nu''(\nu''-1)}{1 \cdot 2} + \delta' + \varkappa'$$

Doppelpuncte; zieht man hiervon die ν'' Berührungspuncte ab, so drückt der Rest

$$\nu'\nu'' + \frac{\nu''(\nu''-3)}{1 \cdot 2} + \delta' + \varkappa'$$

die Ordnung der Doppelcurve der Fläche aus. Betrachtet man analog den Schnitt der durch P'' entsteht, so erhält man die Ordnung der Doppelcurve ausgedrückt durch

$$\nu''\nu' + \frac{\nu'(\nu'-3)}{1 \cdot 2} + \delta'' + \varkappa''.$$

Man findet also identisch

$$\frac{\nu''(\nu''-3)}{1 \cdot 2} + \delta' + \varkappa' = \frac{\nu'(\nu'-3)}{1 \cdot 2} + \delta'' + \varkappa''$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1 \cdot 2} - (\delta' + \varkappa') = \frac{(\nu''-1)(\nu''-2)}{1 \cdot 2} - (\delta'' + \varkappa'').$$

Bezeichnen wir nun mit dem Namen *Geschlecht* einer Curve (ν') die Zahl

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1 \cdot 2} - (\delta' + \varkappa'),$$

so können wir schliessen: *Zwei ebene projectivische krumme Punctreihen sind von demselben Geschlecht.*

Da nach den Formeln von Plücker

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1 \cdot 2} - (\delta' + \varkappa') = \frac{(\mu'-1)(\mu'-2)}{1 \cdot 2} - (\tau' + \iota')$$

ist,[1] wo μ' die Classe der Curve (ν'), τ' die Zahl ihrer Doppeltangenten,

[1] Diese Gleichung kann auch als eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Theorem angesehen werden, da zwei reciproke ebene Curven augenscheinlich projectivische Punctreihen sind.

und ι' die der Wendetangenten ist, so ist das Geschlecht der Curve auch ausgedrückt durch

$$\frac{(\mu'-1)(\mu'-2)}{1\,.\,2}-(\tau'+\iota').$$

Es ist klar, dass zwei ebene Schnitte derselben windschiefen Fläche projectivische Punctreihen sein müssen, wenn man nur als entsprechende Puncte diejenigen annimmt, welche auf derselben Generatrix liegen, und sie sind also auch Curven von demselben Geschlecht. Ist die Fläche vom Grade ν und hat sie eine Doppelcurve, deren Ordnungszahl δ ist, so ist das Geschlecht eines beliebigen ebenen Schnittes gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}-\delta$.

Ist also eine windschiefe Fläche vom ν-ten Grade und vom Geschlechte π, das heisst ist π das Geschlecht eines ebenen Schnittes, so ist die Ordnung der Doppelcurve gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}-\pi$. Diese Zahl kann nun nicht kleiner sein als $\nu-2$, da dieses die Zahl der Puncte ist, in denen die Doppelcurve von jeder Generatrix getroffen wird. Wenn die Fläche keine Doppelgeraden enthält, durch welche die Ebenen gehen müssen, welche zwei verschiedene Generatrixen enthalten, so muss die Ordnung der Doppelcurve sogar mindestens $2\nu-5$ sein, da zwei Generatrixen, die sich schneiden, diese Zahl von Doppelpuncten besitzen.

58. Unter *Geschlecht einer Raumcurve* wollen wir das Geschlecht irgend einer Perspectivcurve verstehen. Es sei nun ν die Ordnung der Curve, ϑ die Zahl ihrer scheinbaren und wirklichen Doppelpuncte und β die Zahl der stationären Puncte; dann ist die Perspectivcurve [1]) von der ν-ten Ordnung und besitzt ϑ Doppelpuncte und β Spitzen, sie ist also eine Curve vom Geschlechte

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}-(\vartheta+\beta).$$

Aus den Formeln Cayley's hat man nun [2]):

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}-(\vartheta+\beta)=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2}-(\gamma+\alpha)$$
$$=\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2}-(\eta+\mu+\theta)=\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2}-(\xi+\nu+\theta).$$

Dies sind also ebensoviele Ausdrücke für das Geschlecht einer Raumcurve.

Da eine Raumcurve und ihre Perspectivcurve offenbar zwei projectivische Punctreihen bilden, so können wir schliessen: *Zwei beliebige ebene oder Raumcurven, die projectivische Punctreihen bilden, sind von demselben Geschlecht.* [3])

Die Eintheilung der ebenen und Raumcurven und damit auch der Kegel und der Developpablen, sowie der windschiefen Flächen als Reihen von

1) Das heisst ein ebener Schnitt eines Perspectivkegels der Raumcurve (12).

2) Hier bedeuten die Zeichen

$$\mu,\ \rho,\ \alpha,\ \gamma,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

dieselben Zahlen, wie sie oben (10, 12) auseinander gesetzt sind.

3) Clebsch, *Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* (Crelles Journal, Bd. 64; 1865).

Geraden in *Geschlechter*, die von Professor CLEBSCH vorgeschlagen [1]), ist von der höchsten Wichtigkeit. Durch sie näheren und verknüpfen sich die anscheinend verschiedenartigsten Eigenschaften der geometrischen Formen. Demgemäss ist das Maass der Schwierigkeit, welches das Studium einer einfach unendlichen Reihe von Elementen — Puncten, Geraden, Ebenen — darbieten kann, weder die Ordnung noch die Classe, sondern vielmehr das Geschlecht. [2])

59. Die einfachsten unter den windschiefen Flächen sind die, deren Geschlecht Null ist. Nennen wir ν den Grad der Fläche, so ist die Ordnung der Knotencurve gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}$ und es hat also ein beliebiger ebener Schnitt der Fläche die grösste Zahl der Doppelpuncte, die in einer ebenen Curve existieren können. Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{x}$ des ebenen

---

1) Man vgl. auch SCHWARZ, *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Crelles Journal, Bd. 64) und *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (ibid. Bd. 67).

2) Eine ebene Curve ist vom Geschlechte *Null*, sobald $\delta + \varkappa = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}$ ist, das heisst, sobald sie die grösste Zahl von Doppelpuncten besitzt (*Einleitung*, Nr. 35). In diesem Falle kann man die Puncte der Curve einzeln mittelst der Curven eines Büschels (ν—1)-ter Ordnung erhalten. Denn die Doppelpuncte und $2\nu-3$ andere beliebig in der Curve fixirte Puncte bestimmen ein System von $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - 1$ Puncten, das heisst, sie bestimmen (*Einleitung*, Nr. 41) die Basis eines Büschels (ν—1)-ter Ordnung. Von diesem schneidet jede Curve die gegebene Curve *in einem einzigen neuen Puncte.* Die Curve ist in Gemäss der Formeln von PLÜCKER von der Classe $2(\nu-1)-\varkappa$ und hat $3(\nu-2)-2\varkappa$ Wendepuncte und $2(\nu-3)(\nu-2-\varkappa)-\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1\,.\,2}$ Doppeltangenten. Daraus folgt, dass eine Curve der ν-ten Ordnung nicht mehr als $\frac{3(\nu-2)}{1\,.\,2}$ Spitzen haben kann. CLEBSCH, *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.* (Crelles Journal, Bd. 64; 1865).

Da die Curven eines Büschels einzeln den einzelnen Puncten einer Geraden entsprechend aufgefasst werden können, so kann man also auch eine Curve vom Geschlechte Null als eine jeder Geraden projectivische Punctreihe auffassen. Dies gilt auch für eine Raumcurve, da man für diese stets ihre Perspectivcurve setzen kann. Hieraus ergeben sich viele wichtige Folgerungen. Zum Beispiel, wenn in einer Curve vom Geschlecht 0 zwei Reihen entsprechender Puncte existieren in der Art, dass einem beliebigen Puncte der ersten Reihe β Puncte der zweiten, und einem beliebigen Puncte der zweiten β' Puncte der ersten Reihe entsprechen, so ist $\beta + \beta'$ die Zahl von Puncten, in denen je zwei entsprechende zusammenfallen. Das heisst auch, um es kurz zu sagen: *Gibt es in einer Curve vom Geschlecht* 0 *zwei Reihen von Puncten mit der Beziehung* (β, β'), *so ist die Zahl der zusammenfallenden Puncte gleich* $\beta + \beta'$. Um dieses Theorem zu beweisen, genügt es, zu beachten, dass dasselbe für eine gerade Punctreihe richtig ist, die der gegebenen Curve projectivisch ist. CAYLEY, *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Comptes rendus, 12 mars 1866).

Schnittes geht eine Generatrix, welche die Doppelcurve in $\nu-2$ Puncten trifft. Von jedem dieser Puncte geht eine neue Generatrix aus. Es sei $\mathfrak{x}'$ der Punct, in dem dieselbe den ebenen Schnitt trifft; dann entsprechen also dem Puncte $\mathfrak{x}$ je $\nu-2$ Puncte $\mathfrak{x}'$, und ebenso bestimmt der Punct $\mathfrak{x}'$ andere $\nu-2$ Puncte, von denen einer $\mathfrak{x}$ ist. In dem ebenen Schnitte also, der eine Curve vom Geschlechte 0 darstellt, existieren zwei Reihen von Puncten mit der Beziehung $(\nu-2, \nu-2)$; es gibt folglich $2(\nu-2)$ vereinigte Puncte, das heisst, in der Raumcurve existieren $2(\nu-2)$ Cuspidalpuncte — Puncte, in welchen die beiden Generatrixen zusammenfallen — oder auch, es gibt $2(\nu-2)$ Generatrixen, von denen jede durch die unmittelbar folgende Generatrix geschnitten wird.

60. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer windschiefen Fläche ν-ten Grades, die zwei gerade Directrixen a, b hat. Es sei k die Curve ν-ter Ordnung, die man erhält, wenn man die Fläche durch eine beliebig fixierte Ebene schneidet, dann ist die Fläche der Ort der Geraden, welche auf den drei Directrixen a, b, k hingleitet. Die Geraden a, b mögen auf der Fläche etwa ρ-fach und σ-fach sein, dann werden folglich die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, in denen sie k treffen, für diese Curve bezüglich ρ-fache und σ-fache Puncte sein. Die Geraden, die durch einen Punct $\mathfrak{x}$ von a gehen und b treffen, liegen in einer Ebene; diejenigen, welche $\mathfrak{x}$ mit den Puncten von k verbinden, bilden einen Kegel ν-ter Ordnung, für welchen die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{b}$ eine σ-fache Generatrix ist. Der Kegel und die Ebene haben noch andere $\nu-\sigma$ Gerade gemein, die ebensoviel Generatrixen der windschiefen Fläche sind, die durch $\mathfrak{x}$ gehen. Es ist folglich $\rho = \nu - \sigma$.

Jede Ebene durch a schneidet k ausser in $\mathfrak{a}$ noch in σ Puncten, oder auch sie schneidet die Fläche in σ Generatrixen, die, weil sie b treffen müssen, sämmtlich durch denselben Punct gehen. In gleicher Weise schneidet jede durch b gelegte Ebene die Fläche in ρ Generatrixen, die sich in *einem* Puncte von a schneiden. Die Generatrixen, welche von dem nämlichen Puncte $\mathfrak{x}$ von a ausgehen, treffen k in ρ Puncten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_1$, . . ., die auf einer Geraden x liegen, welche durch $\mathfrak{b}$ geht, so dass die Puncte $\mathfrak{x}$ von a projectivisch den Geraden x oder den Gruppen der Puncte $\mathfrak{x}_1$, die in diesen Geraden liegen, entsprechen. Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ von a entsprechen ρ Puncte $\mathfrak{x}_1$ von k, die mit $\mathfrak{b}$ in gerader Linie liegen, aber dem Puncte $\mathfrak{a}$ von a entsprechen ρ in dem Punct $\mathfrak{a}$ selbst zusammenfallende Puncte, weil die Ebene von k keine Generatrix der Fläche enthält; das heisst, dem Puncte $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ entspricht die Gerade $x = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Den Tangenten der σ Zweige von k, die sich in $\mathfrak{b}$ kreuzen, entsprechen die Puncte, in denen a von Generatrixen getroffen wird, die von $\mathfrak{b}$ ausgehen.

Haben wir umgekehrt eine ebene Curve k der ν-ten Ordnung, die einen ρ-fachen Punct $\mathfrak{a}$ und einen σ-fachen Punct $\mathfrak{b}$ hat $(\rho + \sigma = \nu)$, und eine Gerade a, die auf k im Puncte $\mathfrak{a}$ aufsteht, deren Puncte $\mathfrak{x}$ projectivisch den Geraden x entsprechen, die in der Ebene von k liegen und in $\mathfrak{b}$ zusammenlaufen, und setzen wir voraus, dass dem Puncte $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ die Gerade $x = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ entspricht, was ist dann der Ort der Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche die Puncte von a mit den Puncten verbinden, in welchen k von den entsprechenden

Geraden x geschnitten wird? Man nehme eine beliebige Gerade t als Axe eines Büschels von Ebenen, die durch die verschiedenen Puncte $\mathfrak{x}$ von a gehen. Dieses Büschel und das Büschel der entsprechenden Geraden x sind projectivisch und erzeugen daher durch die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht, also k in noch weitern $2\nu-\rho-\sigma=\nu$ Puncten $\mathfrak{x}_1$ schneidet. Verbindet man $\mathfrak{x}_1$ mit demjenigen Puncte $\mathfrak{x}$ von a, welcher dem Strahle $x=\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ entspricht, so erhält man eine Gerade, die in der Ebene $t\mathfrak{x}$ liegt. Die gesuchte Fläche ist also vom ν-ten Grade. Jede Ebene durch a schneidet k in $\mathfrak{a}$ und in anderen σ Puncten $\mathfrak{x}_1$, denen der Reihe nach der Punct $\mathfrak{a}$ und andere σ Puncte $\mathfrak{x}$ von a entsprechen; die beiden Punctreihen sind projectivisch und zwei entsprechende Puncte fallen zusammen; die Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ schneiden sich daher sämmtlich in einem festen Puncte $\mathfrak{y}$ der Ebene. Geht die Ebene durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so fällt der Punct $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{b}$ zusammen und folglich hat die Fläche ausser a noch eine andere geradlinige Directrix, die σ-fach ist und durch den Punct $\mathfrak{b}$ geht.

Wir wollen jetzt annehmen, die Gerade b rücke der Geraden a unendlich nahe, also auch der Punct $\mathfrak{b}$ dem Puncte $\mathfrak{a}$. Nehmen wir ρ nicht kleiner als σ, so gibt es unter den ρ Zweigen von k, die sich in $\mathfrak{a}$ kreuzen, σ, die auch durch $\mathfrak{b}$ gehen und die also von der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berührt werden. [1]) In diesem Falle entsprechen die Puncte $\mathfrak{x}$ von a denjenigen Geraden x projectivisch, die in der Ebene von k durch $\mathfrak{a}$ gezogen sind; der Punct $\mathfrak{a}$ entspricht der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, und die Fläche ist auch der Ort der Geraden, die von dem Puncte $\mathfrak{x}$ nach den Puncten $\mathfrak{x}_1$ gehen, in denen k von den entsprechenden Geraden x getroffen wird. Jede Ebene durch a enthält σ Generatrixen, die in *einen* Punct der Directrix a zusammenlaufen, die für die Fläche eine ρ-fache Gerade ist. Es folgt hieraus, dass durch einen beliebigen Punct von a eine Zahl von $\rho-\sigma$ Generatrixen geht, die sämmtlich mit a zusammenfallen, und in jedem der $\rho-\sigma$ Puncte von a, welche den Tangenten an die Zweige von k entsprechen, die nicht von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berührt werden, fallen $\rho-\sigma+1$ Generatrixen mit a zusammen.

Umgekehrt: Gegeben eine ebene Curve k von der Ordnung $\nu=\rho+\sigma$ die einen $\rho(+\sigma)$-fachen Punct $\mathfrak{a}$ hat, ferner gegeben eine Gerade a, deren Puncte $\mathfrak{x}$ eine projectivische Punctreihe in Bezug auf das Büschel von Geraden x bilden, die in der Ebene von k durch $\mathfrak{a}$ gehen, in der Art, dass dem Puncte $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ entspricht, die σ Zweige von k in a berührt und in diesem Puncte $\rho+\sigma$ gemeinschaftliche Puncte mit der Curve hat, dann ist der Ort der Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche die Puncte von a mit den Puncten verbinden, in denen k von den entsprechenden Strahlen x getroffen

---

1) Man hat so einen vielfachen Punct $\mathfrak{a}$, durch den ρ Zweige der Curve gehen, der aber für

$$\frac{\rho(\rho-1)}{1.2}+\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}$$

Doppelpuncte gilt, da er durch das Zusammenfallen eines ρ-fachen und eines σ-fachen Punctes entsteht. Cayley nennt ihn einen $\rho(+\sigma)$-fachen Punct, um ihn von einem $(\rho+\sigma)$-fachen Puncte zu unterscheiden.

wird, eine Fläche des ν-ten Grades. Denn zieht man eine beliebige Transversale t, so erhält man wie im allgemeinen Falle einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{a}$ geht und dort $\mathfrak{ab}$ berührt, also k nur noch in anderen ν Puncten $\mathfrak{x}_1$ trifft. [1])

In beiden Fällen, mögen die Directrixen a, b verschieden sein oder zusammenfallen, ist die windschiefe Fläche vom Geschlecht

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2} - \frac{\rho(\rho-1)}{1.2} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} = (\rho-1)(\sigma-1).$$

Diese Zahl kann sich aber noch erniedrigen, wenn die Curve k andere vielfache Puncte und folglich die Fläche vielfache Generatrixen besitzt.

Macht man $\nu = 3$, also $\rho = 2, \sigma = 1$, so hat man das einfachste Beispiel der eben betrachteten Flächen. Die windschiefe Fläche dritten Grades hat im Allgemeinen zwei geradlinige Directrixen, von denen eine eine Doppelgerade ist. Beide Directrixen können aber auch in eine einzige Gerade zusammenfallen. [2])

---

[1]) Cayley, *Second memoir on skew surfaces otherwise scrolls.* (Philosophical Transactions, 1864; p. 559).

[2]) Man sehe des Verfassers Abhandlungen: *Sulle superficie gobbe del terz' ordine.* (Atti del R. Istituto Lombardo. Milano 1861). — *Sur les surfaces gauches du troisième degré.* (Crelles Journal, Bd. 60; 1861). — *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di* 3^0 *grado sopra un piano* (Rendiconti del R. Ist. Lomb. Milano, gennajo 1867). — *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, ecc.* (Annali di Matematica, 2ª Serie, T. 1°, Milano 1868). Man vergleiche auch die Philosophical Transactions 1863; p. 241.

Wenn eine nicht windschiefe Fläche ν-ter Ordnung eine Gerade r enthält, so berührt im Allgemeinen jede Ebene, die ganz beliebig durch r gelegt ist, die Fläche in $\nu-1$ verschiedenen Puncten. Es sind dies die Durchschnittspuncte von r mit derjenigen Curve, welche mit r zusammen den vollständigen Durchschnitt der Fläche und der Ebene bildet. Dreht man die Ebene r, so erzeugen die $\nu-1$ Berührungspuncte eine Involution $(\nu-1)$-ten Grades, deren Doppelpuncte offenbar parabolische Puncte der Fläche sind, da die Tangentialebene in jedem derselben die Fläche in zwei unmittelbar folgenden Puncten berührt. Haben zwei nicht geradlinige Flächen von den Ordnungen ν, ν' eine Gerade r gemein, so haben wir auf dieser zwei projectivische Involutionen, wenn man die Puncte als entsprechende ansieht, in denen die beiden Flächen von derselben Ebene berührt werden. Beide Involutionen haben (*Einleitung*, Nr. 24, b) $\nu+\nu'$ gemeinschaftliche Puncte, das heisst, beide Flächen berühren sich in $\nu+\nu'$ Puncten von r und schneiden sich folglich in einer Curve, welche r in diesen $\nu+\nu'$ Puncten trifft. Wenden wir dieses Resultat auf eine nicht geradlinige Fläche ν-ter Ordnung an, die durch ν Generatrixen desselben Systems eines Hyperboloids gehen, so findet man, dass der überbleibende Schnitt dieser beiden Flächen eine Curve ν-ter Ordnung ist, die mit jeder der ν Generatrixen ν Puncte gemein hat. Die Fläche schneidet also das Hyperboloid ausserdem noch in ν Generatrixen des andern Systems. Diesen Satz verdankt man Moutard (Man sehe Poncelet, *Propriétés projectives des figures*, annotation de la 2ᵉ édition, Paris 1865; p. 418).

Reciprok gilt dasselbe Theorem für eine nicht geradlinige Fläche ν-ter Classe.

ZWEITER THEIL.

CAPITEL I.

POLARFLÄCHEN IN BEZUG AUF EINE FLÄCHE BELIEBIGER ORDNUNG.

61. Es sei eine beliebige Oberfläche *(Fundamentalfläche)* F_ν der ν-ten Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{o}$ ein beliebiger im Raume fixierter Punct. Lässt man nun um $\mathfrak{o}$ eine Transversale rotieren, die in einer beliebigen Lage F_ν in ν Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ trifft, so ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$ eine Fläche ρ-ter Ordnung, da sie auf jeder durch $\mathfrak{o}$ gezogenen Transversale ρ Puncte besitzt. Eine solche Fläche nennt man die *$(\nu-\rho)$-te Polarfläche* des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Fundamentalfläche F_ν. [1])

Oder lässt man um $\mathfrak{o}$ eine Transversalebene rotieren, die in einer gewissen Lage F_ν in einer Curve c_ν der ν-ten Ordnung schneidet, so ist die $(\nu-\rho)$-te Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf c_ν eine andere Curve ρ-ter Ordnung, und der Ort dieser Curve ist eine Fläche ρ-ter Ordnung: die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν. [2])

Auf diese Weise entspricht dem Puncte $\mathfrak{o}$ eine Zahl von $\nu-1$ Polarflächen in Bezug auf die gegebene Fläche. Die erste Polarfläche ist von der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die zweite Polarfläche von der $(\nu-2)$-ten Ordnung, ..., die vorletzte Polarfläche ist eine Oberfläche zweiter Ordnung *(Quadripolarfläche)*, die letzte oder $(\nu-1)$-te Polarfläche endlich ist eine Ebene *(Polarebene)*.

---

1) Grassmann, *Theorie der Centralen* (Crelles Journal, Bd. 24. 1842; S. 272). — *Einleitung*, Nr. 68.

2) Ist F_ν ein Kegel, und der Pol ein vom Scheitel verschiedener Punct, so sieht man sogleich, wenn man durch den Scheitel und den Pol eine Transversalebene legt, dass jede beliebige Polarfläche wieder ein Kegel ist mit demselben Scheitel als der gegebene (4).

62. Aus dem bekannten Theoreme:[1]) „Ist $\mathfrak{m}$ ein harmonischer Mittel„punct ρ-ten Grades für das System $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$, so „ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ ein harmonischer Mittelpunct $(\nu-\rho)$-ten Grades desselben „Systems $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf $\mathfrak{m}$ als Pol" folgt:

Ist $\mathfrak{m}$ ein Punct der $(\nu-\rho)$-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, so ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ auf der ρ-ten Polarfläche von $\mathfrak{m}$ gelegen.

Oder auch:

Der Ort eines Poles, dessen ρ-te Polarfläche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{o}$ geht, ist die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$.

So ist zum Beispiel die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ der Ort der Puncte, deren Polarebenen durch $\mathfrak{o}$ gehen; die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; u. s. w. Umgekehrt ist die Polarebene von $\mathfrak{o}$ der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ ist der Ort der Puncte, deren zweite Polarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; u. s. w.

63. Aus dem bekannten Satze:[2]) „Sind $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\rho$ die harmo„nischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf „$\mathfrak{o}$ als Pol, so haben die beiden Systeme $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_\rho$ in Be„zug auf den nämlichen Pol dieselben harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades, $\sigma<\rho$," folgt:

Ein beliebiger Pol hat dieselbe Polarfläche in Bezug auf die gegebene Fläche und in Bezug auf jede Polarfläche höherer Ordnung für denselben Pol als Fundamentalfläche angesehen.

Oder mit anderen Worten:

Für einen gegebenen Pol fällt die σ-te Polarfläche in Bezug auf die σ'-te Polarfläche mit der $(\sigma+\sigma')$-ten Polarfläche in Bezug auf die Fundamentalfläche zusammen.

So fällt zum Beispiel die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν zusammen mit der Polarebene in Bezug auf die $(\nu-2)$-te, $(\nu-3)$-te, $(\nu-4)$-te ... Polarfläche desselben Poles; ...; die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν ist die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die erste Polarfläche desselben Punctes; u. s. w.

64. Wenn der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche liegt, so dass er also den Platz einer der ν Durchschnittspuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ (61) vertritt, so fällt der harmonische Mittelpunct ersten Grades mit $\mathfrak{o}$ zusammen. Ist aber die Transversale Tangente von F_ν in $\mathfrak{o}$, so sind zwei Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in $\mathfrak{o}$ vereinigt, und weil in diesem Falle der harmonische Mittelpunct ersten Grades unbestimmt wird, so kann man in diesem Falle jeden Punct

---

1) *Einleitung*, Nr. 12.
2) *Einleitung*, Nr. 13.

der Transversale als solchen betrachten. [1]) Nun ist der Ort der Tangenten von F_ν in $\mathfrak{o}$ eine Ebene, so lange wenigstens $\mathfrak{o}$ kein vielfacher Punct ist; folglich gilt der Satz:

Die Polarebene eines Punctes der Fundamentalfläche ist die Tangentialebene der Fläche in diesem Puncte.

65. Wenn der Pol nicht auf F_ν liegt, aber die Transversale Tangente dieser Fläche ist, so fallen zwei von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in den Berührungspunct zusammen; dieser ist also einer der harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-1)$-ten Grades, [2]) also ein Punct der ersten Polarfläche. Man hat folglich den Satz:

Die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ schneidet die Fundamentalfläche in der Berührungscurve zwischen dieser Fläche und dem umgeschriebenen Kegel, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$ ist.

Die erste Polarfläche ist von der $(\nu-1)$-ten Ordnung, sie schneidet also F_ν in einer Curve $\nu(\nu-1)$-ter Ordnung. Diese Zahl drückt also auch die Ordnung des umgeschriebenen Kegels aus. [3])

66. Die Classe von F_ν ist die Zahl der Tangentialebenen, die man an diese Fläche durch eine beliebige Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ legen kann, das heisst die Zahl von Ebenen, die durch $\mathfrak{o}$ gehen und den umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ berühren. Mit anderen Worten, die Classe von F_ν ist die Classe eines beliebigen umgeschriebenen Kegels, der seinen Scheitel in einem beliebigen Puncte des Raumes hat.

Die Berührungspuncte der Tangentialebenen, die durch die Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ gehen, liegen in den ersten Polarflächen dieser beiden Pole. Da diese beiden Polarflächen und die Fläche F_ν drei Flächen $(\nu-1)$-ter, $(\nu-1)$-ter, ν-ter Ordnung sind, so haben sie $\nu(\nu-1)^2$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte. Folglich hat man den Satz: [4])

Eine Fläche ν-ter Ordnung ist im Allgemeinen von der $\nu(\nu-1)^2$-ten Classe.

67. Osculiert eine Gerade, die durch den Pol $\mathfrak{o}$ gezogen ist, die Fläche in $\mathfrak{m}$, so ist dieselbe Gerade auch in $\mathfrak{m}$ Tangente der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, und auch die zweite Polarfläche dieses Punctes geht durch $\mathfrak{m}$. [5]) Umgekehrt ist klar, wenn $\mathfrak{m}$ ein gemeinschaftlicher Punct zwischen F_ν und der ersten und zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, dass dann die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{m}$ die Fläche F_ν in $\mathfrak{m}$ osculiert. Die Zahl der Geraden, die sich von $\mathfrak{o}$ an F_ν so ziehen lassen, dass sie diese Fläche osculieren, ist daher so gross als die

---

1) *Einleitung*, Nr. 17, 70.

2) *Einleitung*, Nr. 16.

3) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, § 3. Man vergleiche auch *Correspondance sur l'école polytechnique*. T. 1. 1806; p. 108.

4) Poncelet, *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (Crelles Journal, Bd. 4; S. 30).

5) *Einleitung*, Nr. 80.

Zahl der Puncte, welche F_ν und die erste und zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ gemein haben, das heisst gleich $\nu(\nu-1)(\nu-2)$. Diese Geraden sind offenbar stationäre Generatrixen des umgeschriebenen Kegels.

Da wir jetzt wissen, dass der umgeschriebene Kegel von der Ordnung $\nu(\nu-1)$ ist, von der Classe $\nu(\nu-1)^2$ und dass er $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ stationäre Generatrixen hat, so können wir unter Anwendung der Formeln von Pluecker (3) schliessen, dass derselbe ausserdem

$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Doppelgeneratrixen,

$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$ Bitangentialebenen und

$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ stationäre Tangentialebenen

besitzt. Wir haben daher den Satz:

Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ kann man an eine Oberfläche F_ν

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)$$

Osculierende legen, ferner

$$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$$

Bitangenten (Tangenten in zwei verschiedenen Puncten)

$$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$$

Bitangentialebenen (in zwei verschiedenen Puncten) *und*

$$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$$

stationäre Tangentialebenen (die in zwei unmittelbar folgenden Pnncten berühren).

68. Die parabolischen Puncte bilden auf F_ν eine gewisse Curve, *die parabolische Curve*, die von der ersten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{o}$ in den Puncten geschnitten wird, in denen F_ν von den stationären Ebenen berührt wird, die durch $\mathfrak{o}$ gehen. Aus der Zahl dieser Ebenen folgt, dass die parabolische Curve von der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in $4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncten getroffen wird. Also gilt der Satz:

Die parabolische Curve ist von der $4\nu(\nu-2)$-ten Ordnung.

Ebenso schliesst man aus der Zahl der Bitangentialebenen:

Die Curve, welche den Ort der Berührungspuncte zwischen F_ν und ihren Bitangentialebenen darstellt, ist von der Ordnung

$$\nu(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12).$$

Aus denselben oben betrachteten Zahlen folgert man ferner:

Die stationären Ebenen von F_ν haben eine Developpable von der Classe

$$4\nu(\nu-1)(\nu-2),$$

und die Bitangentialebenen haben eine andere Developpable von der Classe

$$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$$

zur einhüllenden Fläche.

69. Liegt der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche F_ν, so fällt für jede beliebige Lage der Transversale einer der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ mit $\mathfrak{o}$ zusammen, und folglich ist $\mathfrak{o}$ ein harmonischer Mittelpunct jedes Grades des

Systems $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$. Folglich gehen alle Polarflächen von $\mathfrak{o}$ durch diesen Punct.

Ist die durch $\mathfrak{o}$ gezogene Transversale in diesem Puncte Tangente von F_ν, so fallen von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ zwei mit $\mathfrak{o}$ zusammen, dieser Punct vertritt also zwei harmonische Puncte jedes beliebigen Grades.[1] Jede Tangente in $\mathfrak{o}$ an F_ν ist daher in demselben Puncte auch Tangente aller Polaren von $\mathfrak{o}$.

Ist die durch $\mathfrak{o}$ gezogene Transversale eine der beiden Osculierenden von F_ν, so fallen ausserdem drei harmonische Mittelpuncte auf $\mathfrak{o}$, und wir erhalten folglich den Satz:

Liegt der Pol auf der Fundamentalfläche, so hat diese mit sämmtlichen Polarflächen in diesem Puncte die Tangentialebenen und die Osculierenden gemein.[2]

Daraus folgt, dass die beiden Osculierenden von F_ν in $\mathfrak{o}$ die Generatrixen der Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ sind, die sich in diesem Puncte kreuzen. Wenn $\mathfrak{o}$ ein parabolischer Punct ist, so fallen die beiden Generatrixen zusammen, und man hat daher den Satz:

Die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes ist ein Kegel, der die entsprechende Wendeebene berührt, und die Berührungsgeneratrix ist die Gerade, die in diesem Puncte die Fundamentalfläche osculiert.

Man sieht ausserdem, dass ein parabolischer Punct der Fundamentalfläche diese Eigenschaft, ein parabolischer Punct zu sein, auch für alle Polarflächen desselben Punctes behält.

70. Fällt auf einer Transversale der Pol $\mathfrak{o}$ mit einem der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ zum Beispiel mit $\mathfrak{a}_1$ zusammen, so sind die harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-1)$-ten Grades des Systems in Bezug auf obengenannten Pol der Punct $\mathfrak{a}_1$ und die harmonischen Mittelpuncte des niederen Systems $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf denselben Pol.[3] Daraus folgt, dass die erste Polarfläche, sobald der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche liegt, der Ort der harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-2)$-ten Grades des Systems der $\nu-1$ Puncte ist, in denen F_ν ausser in $\mathfrak{o}$ von einer beliebig durch $\mathfrak{o}$ gelegten Transversale geschnitten wird, und analog ist die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ der Ort der harmonischen Mittelpuncte $(\nu-\rho-1)$-ten Grades für das System der obengenannten $\nu-2$ Puncte.

Die Geraden, die sich von $\mathfrak{o}$ so ziehen lassen, dass sie F_ν anderswo berühren, bilden einen Kegel der $[\nu(\nu-1)-2]$-ten Ordnung; denn eine be-

---

1) *Einleitung*, Nr. 17.

2) Aus demselben Satze über die harmonischen Mittelpuncte (*Einleitung*, Nr. 17) erhält man den Satz: *Wenn eine Gerade mit der Fundamentalfläche einen μ-punctigen Contact hat, so hat sie eine ebenso hohe Berührung in demselben Puncte mit jeder Polarfläche des Berührungspunctes.*

3) *Einleitung*, Nr. 17.

liebig durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet F_ν in einer Curve ν-ter Ordnung, an die sich von $\mathfrak{o}$ aus genau $\nu(\nu-1)-2$ Tangenten legen lassen ausser der Tangente durch $\mathfrak{o}$. Das will sagen, dass der umgeschriebene Kegel, der im Allgemeinen von der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung ist, wenn der Scheitel $\mathfrak{o}$ auf die Fläche selbst fällt, sich in die zweimal gezählte Tangentialebene von F_ν in $\mathfrak{o}$ und in einen wirklichen Kegel $[\nu(\nu-1)-2]$-ter Ordnung auflöst. Dieser Kegel ist die Enveloppe der Ebenen, welche F_ν in den Puncten berühren, in welchen sich F_ν und die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ schneiden. Diese beiden Flächen berühren sich aber in $\mathfrak{o}$ und haben dort dieselben Osculierenden, folglich hat die Durchschnittscurve von F_ν mit den ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}$, das heisst die Berührungscurve zwischen F_ν und dem umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ zwei Zweige, die sich in $\mathfrak{o}$ kreuzen, und dort von der Geraden berührt werden, welche in demselben Puncte F_ν osculieren.

Es folgt weiter, dass die Tangentialebene von F_ν in $\mathfrak{o}$ auch den umgeschriebenen Kegel längs der beiden Osculierenden berührt, wie wir es schon anderweitig (33) gefunden haben. Die Ebene und der Kegel haben ausserdem noch $\nu(\nu-1)-2-2\,.\,2=(\nu-3)(\nu+2)$ Gerade gemein, und folglich hat man den Satz:

Unter den Geraden, die F_ν in $\mathfrak{o}$ berühren, gibt es $(\nu-3)(\nu+2)$, die F_ν auch anderweitig berühren.

Berühren sich drei Flächen in einem Puncte und haben sie in ihm dieselben Osculierenden, so ist dieser Punct sechs zusammenfallenden Durchschnittspuncten äquivalent.[1]) Die Fundamentalfläche und die erste und zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ haben daher ausser diesem Puncte nur noch $(\nu-1)(\nu-2)-6$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte; das heisst:

Durch $\mathfrak{o}$ gehen $(\nu-3)(\nu^2+2)$ Gerade, die F_ν anderswo osculieren.

Der umgeschriebene Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$ hat nach den Formeln von Pluecker (3), da seine Ordnungszahl gleich $(\nu+1)(\nu-2)$, seine Classe gleich $\nu(\nu-1)^2$ ist, und da er $(\nu-3)(\nu^2+2)$ Cuspidalgeneratrixen hat,

$\frac{1}{2}(\nu-3)(\nu-4)(\nu^2+\nu-2)$ Doppelgeneratrixen,
$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Wendeebenen, und
$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$ Bitangentialebenen

ausser der Ebene, welche F_ν in $\mathfrak{o}$ berührt.

Diese Zahlen geben an, wieviel Gerade man durch $\mathfrak{o}$ legen kann, so dass sie F_ν anderweitig in zwei verschiedenen Puncten berühren; wieviele Wendeebenen und wieviele Tangentialebenen durch $\mathfrak{o}$ gehen.

71. Hat F_ν einen σ-fachen Punct $\mathfrak{d}$, und man nimmt diesen als Pol, so schneidet eine beliebig durch $\mathfrak{d}$ gelegte Transversale die Fläche in diesem Puncte in σ zusammenfallenden Puncten; σ harmonische Mittelpuncte jedes

---

1) Dies ist klar, wenn man einer der drei Flächen die Tangentialebene substituiert.

beliebigen Grades fallen auf $\mathfrak{d}$, und dieser Punct ist folglich für jede Polarfläche dieses Punctes ein σ-facher Punct. [1]) Daraus folgt:

Die $(\nu-\sigma)$*-te Polarfläche von* $\mathfrak{d}$ *ist ein Kegel* σ*-ter Ordnung mit dem Scheitel in* $\mathfrak{d}$*, und die Polarflächen niederer Ordnung desselben Punctes werden unbestimmt.*

Ziehen wir durch $\mathfrak{d}$ eine Transversale, die in ihm mit F_ν einen $(\sigma+1)$-punctigen Contact hat, so sind die harmonischen Mittelpuncte des σ-ten Grades unbestimmt, woraus folgt, dass die Transversale vollständig auf der $(\nu-\sigma)$-ten Polarfläche liegt. Hat aber die Transversale in $\mathfrak{d}$ einen $(\sigma+2)$-punctigen Contact mit F_ν, so sind die harmonischen Mittelpuncte sowohl des σ-ten als $(\sigma+1)$-ten Grades unbestimmt, und die Gerade liegt daher sowohl auf der $(\nu-\sigma)$-ten als der $(\nu-\sigma-1)$-ten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$.

Von dieser letzten Art gibt es $\sigma(\sigma+1)$ Transversalen oder auch, die beiden vorgenannten Polarflächen schneiden sich in $\sigma(\sigma+1)$ Geraden. Denn ist $\mathfrak{p}$ ein beiden Polarflächen gemeinsamer Punct, der aber von $\mathfrak{d}$ verschieden ist, so liegt die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{d}$ nicht blos in der $(\nu-\sigma)$-ten Polarfläche, da diese ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$ ist, sondern auch in der $(\nu-\sigma-1)$-ten Polarfläche, da sie mit ihr $\sigma+2$ Puncte gemein hat. [2]) Wir haben also den Satz:

Sobald eine Fundamentalfläche ν*-ter Ordnung einen* σ*-fachen Punct hat, so ist der Ort der Geraden, die in ihm mit der Fläche einen* $(\sigma+1)$*-punctigen Contact haben, ein Kegel* σ*-ter Ordnung, die* $(\nu-\sigma)$*-te Polarfläche dieses Punctes. Es gibt nun* $\sigma(\sigma+1)$ *Gerade, die dort mit der Fläche* $\sigma+2$ *gemeinschaftliche zusammenfallende Puncte haben. Dieselben bilden den Durchschnitt des obengenannten Kegels mit der* $(\nu-\sigma-1)$*-ten Polarfläche des Punctes.*

Ist umgekehrt die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{d}$ ein Kegel von der σ-ten Ordnung mit dem Scheitel in $\mathfrak{d}$, so ist der Punct $\mathfrak{d}$ für die Fundamentalfläche ein σ-facher Punct. Denn zieht man durch $\mathfrak{d}$ eine beliebige Transversale, so findet man, dass die harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades sämmtlich in $\mathfrak{d}$ vereinigt sind, was nur dann geschehen kann, wenn im Pole σ Puncte des Systems $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ zusammenfallen. [3])

Wenn die $(\nu-\sigma+1)$-te und folglich auch jede andere Polarfläche niederer Ordnung eines Poles $\mathfrak{d}$ unbestimmt ist, so ist die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$. Zieht man nämlich durch $\mathfrak{d}$ eine Transversale, so ist jeder Punct derselben ein harmonischer Mittelpunct des $(\sigma-1)$-ten Grades, was nicht eintreten kann, wenn nicht in $\mathfrak{d}$ alle harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades zusammenfallen.

72. Wenn von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ σ auf den Punct $\mathfrak{d}$ fallen, und die übrigbleibenden durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-\sigma}$ bezeichnet werden, so ist

[1]) *Einleitung*, Nr. 17, 72.

[2]) Von diesen sind $\sigma+1$ im Puncte $\mathfrak{d}$ vereinigt, weil jede Generatrix des Kegels in $\mathfrak{d}$ mit F_ν einen $(\sigma+1)$-punctigen Contact hat, und also auch mit jeder Polarfläche von $\mathfrak{d}$ (69).

[3]) *Einleitung*, Nr. 17.

bekannt, [1]) dass die harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-\sigma)$-ten Grades $(\rho>\sigma)$ des Systems $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_{\nu-\sigma}$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{d}$ mit dem σ-mal genommenen Punct $\mathfrak{d}$ zusammen die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades für das vollständige System $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf denselben Pol bilden. Folglich hat man den Satz:

Die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche des σ-fachen Punctes $\mathfrak{d}$ ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-\sigma)$-ten Grades der $\nu-\sigma$ Puncte, in denen F_ν von einer beliebigen Transversale geschnitten wird, die durch $\mathfrak{d}$ gezogen ist.

73. Ist $\mathfrak{d}$ ein vielfacher Punct von F_ν, und $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Pol, so fallen, wenn man die Transversale $\mathfrak{od}$ zieht, mindestens zwei von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in den Punct $\mathfrak{d}$ zusammen, und $\mathfrak{d}$ vertritt folglich mindestens einen harmonischen Mittelpunct des $(\nu-1)$-ten Grades. Das heisst aber:

Die erste Polarfläche eines beliebigen Poles geht durch die vielfachen Puncte und folglich auch durch die vielfachen Curven der Fundamentalfläche.

Es folgt daraus, dass, sobald F_ν der Complex von zwei oder mehreren Flächen ist, die erste Polarfläche jedes beliebigen Poles durch die Curven hindurchgeht, längs deren sich die Componentenflächen zu zwei und zwei schneiden.

Wir wollen jetzt als speciellen Fall voraussetzen, F_ν sei aus einem Kegel σ-ter Ordnung und aus einer anderen Fläche $F_{\nu-\sigma}$ zusammengesetzt, und der Pol sei der Scheitel $\mathfrak{o}$ des Kegels. Dann enthält jede Generatrix dieses letzteren als Transversale betrachtet eine unbegrenzte Zahl von Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ und folglich auch unendlich viele harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades. Die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{o}$ ist folglich (72) aus dem vorgenannten Kegel und der $(\nu-\rho)$-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $F_{\nu-\sigma}$ als Fundamentalfläche betrachtet zusammengesetzt Ist $\sigma=1$, so wird der Kegel eine Ebene, und der Satz gilt für jeden beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ dieser Ebene.

74. *Die Polarflächen derselben $(\nu-\rho)$-ten Ordnung eines festen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung als Fundamentalflächen angesehen bilden ein zweites, dem gegebenen projectivisches Büschel.*

Denn eine beliebig durch $\mathfrak{o}$ gelegte Transversale schneidet die Fundamentalfläche in Gruppen von ν Puncten in Involution (41); und die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades dieser Gruppen in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$ bilden eine neue Involution, die der ersten projectivisch ist. [2]) Aber die harmonischen Mittelpuncte sind die Durchschnitte der Transversale mit den entsprechenden Polarflächen, und folglich geht durch einen beliebigen Punct des Raumes nur eine einzige Polarfläche oder, was dasselbe ist, die Polarflächen bilden ein Büschel u. s. w.

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 17.

[2]) *Einleitung*, Nr. 23.

Dieses Theorem lässt sich leicht verallgemeineren. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff ein: *Lineares gerades Punctsystem μ-ter Stufe und ν-ten Grades,* indem wir darunter die μ-fach unendliche Reihe der Gruppen von je ν Puncten verstehen, welche $\nu-\mu$ gemeinschaftlichen Bedingungen in der Art genügen, dass, wenn μ Puncte auf der Geraden beliebig angenommen sind, sich mit denselben nur eine einzige Gruppe der Reihe bilden lässt (42). Für $\mu=1$ erhält man die Involution ν-ten Grades.

Zwei lineare Punctsysteme derselben Stufe auf derselben oder auf zwei verschiedenen Geraden heissen *projectivisch,* wenn die Gruppen des einen den Gruppen des andern eindeutig entsprechen, und wenn den Gruppen des ersten Systems, die ein niederes System $(\mu-\mu')$-ter Stufe bilden, im zweiten Systeme ebenfalls Gruppen dieses zweiten Systems entsprechen, welche ein niederes System derselben $(\mu \quad \mu')$-ten Stufe bilden (44).

Aus dieser Definition [1]) folgt unmittelbar:

Die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades der Gruppen eines gegebenen linearen Punctsystems μ-ter Stufe und ν-ten Grades in Bezug auf einen beliebigen Pol, der auf der gegebenen Geraden gewählt ist, bilden ein neues lineares Punctsystem μ-ter Stufe und ρ-ten Grades, das dem gegebenen projectivisch ist.

Es ist ausserdem klar, *dass die Puncte, in welchen die Oberflächen ν-ter Ordnung eines linearen Flächensystems μ-ter Stufe* (42) *von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, ein lineares Punctsystem μ-ter Stufe und ν-ten Grades bilden;* und dass umgekehrt, wenn die Oberflächen derselben Ordnung einer μ-fach unendlichen Reihe von einer beliebigen Geraden in den Punctgruppen eines linearen Systems geschnitten werden, diese Flächen ebenfalls ein lineares Flächensystem bilden.

Es sei jetzt ein lineares Flächensystem μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{o}$ ein beliebig im Raume fixierter Punct. Zieht man durch $\mathfrak{o}$ eine beliebige Transversale, so schneidet sie die Fläche in Punctgruppen eines linearen Systems, und die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades der Gruppen dieses Systems in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol, bilden ein neues lineares System, das dem ersten projectivisch ist. Folglich haben wir: [2])

Die Polarflächen derselben Ordnung eines festen Poles in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems bilden selbst ein lineares System, das dem gegebenen projectivisch ist.

75. Wie viel Flächen gibt es in einem linearen Systeme μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung, die mit einer gegebenen Geraden einen $(\mu+1)$-punctigen Contact haben?

---

[1]) Es ist wohl überflüssig, zu bemerken, dass ganz analoge Definitionen sich für lineare Curvensysteme geben lassen, die sämmtlich in ein und derselben Ebene gezeichnet sind.

[2]) Man vergleiche: Bobillier, *Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques.* (Annales de Gergonne. T. 18; 1827—28.)

Eine beliebige von diesen Flächen schneidet die Gerade in ν Puncten, von denen wir $\mu+1$ durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots, \mathfrak{x}_{\mu+1}$ bezeichnen wollen. Diese $\mu+1$ Puncte sind so beschaffen, dass wenn μ von ihnen beliebig angenommen werden, der überbleibende $\nu-\mu$ mögliche Lagen haben kann. Daraus folgt, dass auf der Geraden $(\mu+1)(\nu-\mu)$-mal die Puncte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{\mu+1}$ zusammenfallen werden, [1]) und es ist also $(\mu+1)(\nu-\mu)$ die Anzahl der Flächen des Systems, welche die verlangte Eigenschaft haben.

76. Wir nehmen jetzt an, man habe eine Fläche S_ν der ν-ten Ordnung, einen Kegel K_ν derselben Ordnung ν mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$, und man lasse durch die Curve ν^2-ter Ordnung, die den Durchschnitt der Orte S_ν und K_ν bildet, eine andere Fläche S'_ν derselben Ordnung ν gehen; dann trifft jede Generatrix des Kegels K_ν die beiden Flächen S_ν, S'_ν in den nämlichen ν Puncten und folglich sind die ρ harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems der ν Puncte in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol Puncte der $(\nu-\rho)$-ten Polare von $\mathfrak{o}$ für beide Flächen S_ν, S'_ν. Jede Ebene durch $\mathfrak{o}$ enthält ν Generatrixen des Kegels K_ν und folglich $\nu\rho$ solcher harmonischer Mittelpuncte. Die beiden vorgenannten Polarflächen haben also eine Curve $\nu\rho$-ter Ordnung gemein. Aber zwei getrennte Flächen ρ-ter Ordnung können nur eine Curve ρ^2-ter Ordnung gemein haben, und man kann folglich, weil $\nu > \rho$ ist, schliessen, das die $(\nu-\rho)$-ten Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S_ν, S'_ν eine einzige Fläche ausmachen. Das heisst:

Befindet sich in einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung ein Kegel, so hat der Scheitel dieses Kegels in Bezug auf alle Flächen des Büschels dieselbe Polarfläche jeder beliebigen Ordnung.

77. Es sei $\mathfrak{o}$ ein gegebener Pol, P eine beliebige Ebene, $\mathfrak{a}$ einer der Puncte, in denen die Fundamentalfläche F_ν von dem Strahle geschnitten wird, welcher von $\mathfrak{o}$ nach dem Puncte $\mathfrak{p}$ von P geht, endlich $\mathfrak{a}'$ derjenige Punct desselben Strahles, für welchen das Doppelverhältniss $(\mathfrak{opaa}')$ einen gegebenen Werth λ hat. Der vom Puncte $\mathfrak{a}'$ beschriebene Ort, wenn $\mathfrak{a}$ sich auf F_ν bewegt, ist offenbar eine neue Fläche F'_ν der Ordnung ν, die der gegebenen projectivisch *(homographisch)* ist. Die beiden Flächen werden von der Ebene P in ein und derselben Curve ν-ter Ordnung geschnitten, und haben also (40) noch eine andere Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung gemein, die auf einer Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ der $(\nu-1)$-ten Ordnung liegt, die in Verbindung mit der Ebene P eine Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν) bildet.

---

[1]) Bezieht man die Puncte $\mathfrak{x}$ auf einen festen Punct $\mathfrak{o}$ der gegebenen Geraden, so hat unter den Segmenten $\mathfrak{ox}$ eine Gleichung statt, die für jedes derselben vom $(\nu-\mu)$-ten Grade ist, die übrigen als gegeben betrachtet, das heisst eine Gleichung, deren höchstes Glied das Product der $(\nu-\mu)$-ten Potenzen der Segmente $\mathfrak{ox}_1$, $\mathfrak{ox}_2, \ldots, \mathfrak{ox}_{\mu+1}$ enthält. Lässt man jetzt die Puncte $\mathfrak{x}$ zusammenfallen, so geht dieses Product in die $(\mu+1)(\nu-\mu)$-te Potenz von $\mathfrak{ox}$ über.

Die Fläche F'_ν, die man erhält, indem man sich den Werth des Verhältnisses λ veränderen lässt, bilden eine Reihe vom Index ν. Denn ist $\mathfrak{a}'$ ein beliebiger Punct im Raume, und schneidet der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$ die Fläche F_ν in ν Puncten $\mathfrak{a}$ und P im Puncte $\mathfrak{p}$, so geben die ν Werthe des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{a}')$ ν Flächen F_ν die durch $\mathfrak{a}'$ gehen. Die Reihe enthält die gegebene Fläche F_ν, die ν-mal gezählte Ebene P, und den Kegel, dessen Scheitel in $\mathfrak{o}$ liegt, und dessen Directrix die Curve PF_ν ist. Für $\lambda = 1, 0, \infty$ fällt nämlich der Punct $\mathfrak{a}'$ bezüglich mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}$ zusammen.

78. Es sei $\mathfrak{i}$ ein Punct der Durchschnittscurve der Ebene P mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν. Die ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν, F'_ν sind offenbar perspectivisch, und folglich ist $\mathfrak{i}$ auch ein Punct der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F'_ν und folglich auch (74) der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf jede Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν) Umgekehrt gehen also die Polarflächen von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf die Flächen des genannten Büschels durch $\mathfrak{o}$. Unter diesen Flächen betrachten wir diejenige, welche durch $\mathfrak{i}$ geht. Für diese ist $\mathfrak{o}\mathfrak{i}$ entweder Tangente in $\mathfrak{i}$, oder $\mathfrak{i}$ ist ein Doppelpunct. Wäre aber $\mathfrak{i}$ kein Doppelpunct, so würde, da die Fläche, um die es sich handelt, aus der Ebene P und aus $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammengesetzt ist, $\mathfrak{i}\mathfrak{o}$ nicht Tangente sein können; folglich ist $\mathfrak{i}$ ein Doppelpunct, das heisst $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ geht durch $\mathfrak{i}$. Die Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ geht also durch die Durchschnittscurve der Ebene P und der ersten Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν.

79. Lässt man λ variieren, so bilden die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ eine Reihe vom Index $\nu-1$. Ist nämlich $\mathfrak{a}_\nu$ ein beliebiger Punct auf F_ν, und der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_\nu$ schneidet F_ν ausserdem noch in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}$ und P in $\mathfrak{p}$, so geben die $\nu-1$ Werthe des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_\rho\,\mathfrak{a}_\nu)$ die $\nu-1$ Flächen F_ν die durch $\mathfrak{a}_\nu$ gehen und von F_ν verschieden sind. Ihnen entsprechen ebensoviel Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$, die ebenfalls durch $\mathfrak{a}_\nu$ gehen. Es ist somit bewiesen, dass durch einen beliebigen Punct von F_ν $\nu-1$ Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ gehen, dieselbe Eigenschaft hat also auch für jeden Punct des Raumes statt.

Nähert sich einer der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}$ unendlich dem Puncte $\mathfrak{a}_\nu$, so geht die Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ durch den Berührungspunct von F_ν mit einer Tangente, welche von $\mathfrak{o}$ ausgeht; fällt also F'_ν mit F_ν zusammen, so fällt auch $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν zusammen. Wenn $\mathfrak{a}_\nu$ in die Ebene P fällt, das heisst, wenn F'_ν in die ν-mal genommene Ebene P degeneriert, so besteht die entsprechende Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ aus der nämlichen Ebene $(\nu-1)$-mal genommen.

80. Die Einhüllende (48) der Fläche F'_ν ist der Kegel K der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$, und der selbst der Fläche F_ν umgeschrieben ist.

Wenn nämlich zwei von den Flächen F'_ν, die durch denselben Punct $\mathfrak{a}'$ gehen, zusammenfallen sollen, so genügt es, wenn $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$ mit einer Tangente von F_ν zusammenfällt. Die Doppel- (Knoten-) Curve dieser Einhüllenden besteht aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Bitangenten, welche man von $\mathfrak{o}$ aus an F_ν legen kann; die Cuspidalcurve entsteht ebenso aus den $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Osculierenden (67).

Der Kegel K berührt F_ν längs einer Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, die auf einer Fläche $(\nu-1)$-ter Ordnung — der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ — liegt und also F_ν ausserdem längs einer Curve $\nu(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung schneidet, die auf einer Fläche $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung liegt.[1] Die erste Curve ist der Ort der Puncte, für welche eine der Flächen F'_ν mit F_ν zusammenfällt; dagegen fallen in jedem Puncte der zweiten Curve zwei der F'_ν zusammen, die von F_ν verschieden sind. In jedem dieser Puncte fallen auch die beiden entsprechenden Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und die zweite Curve ist also der Durchschnitt von F_ν und der Einhüllenden der $\mathfrak{F}_{\nu-1}$. Diese Einhüllende ist folglich eine Fläche **S** der $(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung.

81. In jedem Puncte der von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Osculierenden fallen drei aufeinanderfolgende F'_ν zusammen, und folglich fallen auch in jedem der $\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Puncten, in welchen F_ν von diesen Geraden geschnitten wird, drei aufeinanderfolgende Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen und ebenso gibt es in jedem der $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$ Durchschnittspuncten der F_ν mit den Bitangenten zwei getrennte Paare zusammenfallender Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$. Die ersten Puncte sind also Stillstandspuncte und die zweiten Doppelpuncte für die Einhüllende **S**, das heisst, diese Einhüllende hat eine Cuspidalcurve von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ und eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$.

82. Da alle Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ durch dieselbe Curve der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die in der Ebene P liegt, gehen, so ist die zwei Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ gemeinschaftliche Curve und folglich auch die Berührungscurve zwischen einer $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ und der Einhüllenden **S** von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)$. Unter den Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ befindet sich auch die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν, und die Berührungscurve zwischen **S** und genannter ersten Polarfläche hat $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncte mit F_ν gemein, die nichts anderes sind, als die Berührungspuncte der Osculierenden. In jedem dieser Puncte fallen nämlich zwei F'_ν, also auch zwei $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und da eine der letzteren die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, so berühren sich in ihnen die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ und **S**. Durch $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ drei Flächen ν-ter, $(\nu-1)$-ter, $(\nu-2)$-ter Ordnung gemeinschaftliche Puncte kann keine weitere Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung gehen, also berührt **S** die erste Polarfläche längs einer Curve, die auf der zweiten Polarfläche liegt. Diese Curve ist der Ort der Puncte, für welche zwei $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammenfallen, deren eine die erste Polarfläche ist.

---

[1]) Man vergleiche *Einleitung*, No. 138. Anmerkung.

Die erste Polarfläche und die Fläche **S** schneiden sich also noch längs einer andern Curve[1]) der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung. In jedem Puncte derselben fallen zwei von der ersten Polarfläche verschiedene $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und folglich fallen dort auch zwei Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ zusammen, wo $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ die Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung ist, welche durch die gemeinschaftliche Durchschnittscurve $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung der ersten Polarfläche und $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ hindurchgeht. Diese Curve der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung ist folglich der Durchschnitt der ersten Polarfläche mit der Einhüllenden der $\mathfrak{F}_{\nu-2}$. Diese Einhüllende ist also eine Fläche **S**′ der $(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung.

Die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ bilden eine Reihe vom Index $\nu-2$. Denn durch einen beliebigen Punct der ersten Polarfläche gehen $\nu-2$ von der ersten Polarfläche verschiedene Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$, denen ebensoviele Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ entsprechen, die durch den nämlichen Punct gehen.

Die Berührungspuncte der Bitangenten sind also die Durchschnitte dreier Flächen: der gegebene F_ν, der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ und der Fläche **S**′, der Einhüllenden der Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$.

CAPITEL II.

GEMISCHTE POLARFLÄCHEN.

83. Wir kehren zur Fundamentalfläche F_ν zurück. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei beliebig gegebene Puncte. Wir wollen durch $P_{\mathfrak{o}}, P_{\mathfrak{o}'}$ die ersten Polarflächen dieser Puncte in Bezug auf F_ν bezeichnen, durch $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}'}$ als Fundamentalfläche betrachtet, und dem ähnlich durch $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}}$; wir wollen dann beweisen, dass $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ und $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ nur eine einzige Oberfläche bilden.

Durch $\mathfrak{o}'$ lege man eine beliebige Ebene E, und es sei K_ν der Kegel ν-ter Ordnung, der den Scheitel in $\mathfrak{o}$ und zur Directrix die Curve EF_ν hat, das heisst den Durchschnitt der Ebene E mit der Fläche F_ν. Die beiden Flächen K_ν, F_ν haben dann noch eine andere Curve $\nu(\nu-1)$-ter Ordnung gemein, die in einer Fläche $F_{\nu-1}$ liegt, die von der $(\nu-1)$-ten Ordnung ist. Da F_ν gleichzeitig mit K_ν und dem Systeme $(EF_{\nu-1})$ demselben Büschel angehört, so muss (75) die Polare $P_{\mathfrak{o}'}$ in dem Büschel enthalten sein, das durch den Kegel $K_{\nu-1}$, der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf K_ν,

---

1) Von diesen der Fläche **S** und der ersten Polarfläche gemeinschaftlichen Curven trifft die erste F_ν in den Berührungspuncten der Osculierenden; die zweite in den Berührungspuncten der Bitangenten.

und das System $(EF_{\nu-2})$ bestimmt ist, wo $F_{\nu-2}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf $F_{\nu-1}$ darstellt. Diese Fläche $F_{\nu-2}$ bildet in Gemeinschaft mit E die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die zusammengesetzte Fläche $(EF_{\nu-1})$ (74). Da nun in dem zuletzt erwähnten Büschel der Kegel $K_{\nu-1}$ mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$ vorkommt, so fällt (76) die Fläche $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den zusammengesetzten Ort $(EF_{\nu-2})$ zusammen, das heisst, sie geht durch die Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, welche den Durchschnitt von $F_{\nu-2}$ mit der Ebene E bildet (73).

Weil F_ν durch die Durchschnittscurve der Orte K_ν und $(EF_{\nu-1})$ geht, so fällt analogerweise die Fläche $P_\mathfrak{o}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $(EF_{\nu-1})$ zusammen, und geht also durch die Durchschnittcurve von $F_{\nu-1}$ und der Ebene E. Die Fläche $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ geht folglich durch die Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, welche die erste Polare von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die früher genannte Curve $EF_{\nu-1}$ ist; das heisst, $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ geht durch den Durchschnitt von $F_{\nu-2}$ mit der Ebene E.

Das will aber sagen, die Flächen $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ und $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ haben eine Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung gemein, die in einer beliebigen durch $\mathfrak{o}'$ gelegten Ebene liegt, und sind folglich ein und dieselbe Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung.

Man habe jetzt im Raume $\mu+1$ beliebige Puncte $\mathfrak{o},\mathfrak{o}',\mathfrak{o}'',\ldots,\mathfrak{o}^{(\mu)}$ und man bezeichne durch $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''}$, mit $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\mathfrak{o}'''}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\mathfrak{o}'''}$ u. s. w., so zeigt das eben bewiesene Theorem, mehrfach hinter einander wiederholt, dass die Polarfläche $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\ldots\mathfrak{o}^{(\mu)}}$ die nämliche Fläche bleibt, in welcher Ordnung man auch die Pole $\mathfrak{o},\mathfrak{o}',\mathfrak{o}'',\ldots,\mathfrak{o}^{(\mu)}$ auf einander folgen lässt. Setzt man jetzt noch voraus, dass σ dieser Puncte in einen einzigen $\mathfrak{o}$, und die übrigen $\mu+1-\sigma=\sigma'$ sich ebenfalls in einen einzigen Punct $\mathfrak{o}'$ zusammenziehen, so haben wir folgendes Theorem[1]):

Gegeben eine Fundamentalfläche F_ν, dann fällt die ρ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}'$ mit der ρ'-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ zusammen.

Solche Polarflächen heissen *gemischte* Polarflächen [2]).

84. Wir wollen jetzt voraussetzen, die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ gehe durch einen Punct $\mathfrak{m}$, oder auch (83) die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ gehe durch $\mathfrak{m}$. Dann geht nach einer schon früher (69) bemerkten Eigenschaft auch die $[(\nu-\rho')-\rho]$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ oder auch (77), es geht die ν'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Be-

---

1) Pluecker, *Ueber ein neues Coordinatensystem.* (Crelles Journal, Bd. 5; 1830. S. 34).

2) Man sehe des Verfassers Abhandlung: *Sopra alcune quistioni nella teoria delle curve piane.* (Annali di Matematica, T. 6; Roma 1864) oder *Einleitung,* zu No. 69 c; S. 258. Im Original der *Introduzione* ist die entsprechende Ableitung **fehlerhaft.**

zug auf die $[(\nu-\rho)-\rho']$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$. Wir erhalten folglich den Satz:

Geht die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{m}$, so geht die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die $(\nu-\rho-\rho')$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$.

85. Wir betrachten von Neuem einen Punct $\mathfrak{d}$, der für die Fundamentalfläche σ-fach ist. Es sei $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Pol. Zieht man die Transversale $\mathfrak{od}$, so fallen σ der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ mit $\mathfrak{d}$ zusammen und dieser Punct vertritt also $\sigma-\rho$ harmonische Mittelpuncte vom Grade $\nu-\rho$; die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht daher durch $\mathfrak{d}$ — so lange $\rho<\sigma$ ist. — Die $[(\nu-\rho)-(\sigma-\rho)]$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ fällt (83) mit der ρ-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ zusammen. Nun ist aber (71) die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ ein Kegel mit dem Scheitel in $\mathfrak{d}$ und σ-ter Ordnung, und es ist folglich auch die $[(\nu-\rho)-(\sigma-\rho)]$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ein Kegel vom Scheitel $\mathfrak{d}$ und $(\sigma-\rho)$-ter Ordnung. Man hat also (71):

Ist ein Punct $\mathfrak{d}$ für die Fundamentalfläche σ-fach, so ist er für die ρ-te Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ $(\rho-\sigma)$-fach, und der Berührungskegel dieser Polarfläche in $\mathfrak{d}$ ist die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Kegel, der die Fundamentalfläche im Puncte $\mathfrak{d}$ berührt [1]).

Daraus entnimmt man noch den Satz, dass die ρ-ten Polarflächen sämmtlicher Puncte einer Geraden, die durch $\mathfrak{d}$ geht, in $\mathfrak{d}$ den nämlichen Berührungskegel $(\sigma-\rho)$-ter Ordnung haben.

86. Die ersten Polarflächen zweier beliebiger Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die Fundamentalfläche F_ν schneiden sich in einer Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung. Da jeder Punct derselben in beiden ersten Polarflächen liegt, so geht seine Polarebene sowohl durch $\mathfrak{o}$ als durch $\mathfrak{o}'$ (62); folglich haben wir:

Der Ort der Puncte, deren Polarebenen durch eine gegebene Gerade $\mathfrak{oo}'$ gehen, ist eine Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung.

Da die Polarebene jedes Punctes dieser Curve durch die Gerade $\mathfrak{oo}'$ geht, so geht auch die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes der Geraden durch diese Curve. Folglich entsteht:

Die ersten Polarflächen der Puncte einer Geraden bilden ein Büschel.

Die Curve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung, die Basis dieses Büschels, nennt man *die erste Polare der gegebenen Geraden* [2]).

87. Die ersten Polarflächen dreier Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$ haben $(\nu-1)^3$ Puncte gemein. Die Polarebene jedes dieser Puncte geht durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$, das heisst, jeder dieser $(\nu-1)^3$ Puncte ist der Pol der Ebene $\mathfrak{oo}'\mathfrak{o}''$. Umgekehrt geht

---

1) Für die Theorie der ebenen Curven substituiere man obigen Beweis für den unzureichenden der *Einleitung*, No. 73.

2) Bobillier, *a. a. O.*

die erste Polarfläche jedes Punctes dieser Ebene durch jeden der obigen $(\nu-1)^3$ Puncte; das heisst:

Eine beliebige Ebene hat $(\nu-1)^3$ *Pole, welche die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte aller ersten Polarflächen sind, deren Pole Puncte jener Ebene sind* [1]).

Oder auch:

Die ersten Polarflächen der Puncte einer Ebene bilden ein Netz.

Denn suchen wir in der gegebenen Ebene einen Pol, dessen erste Polarfläche durch einen willkürlich im Raume angenommenen Punct $\mathfrak{m}$ geht, so ist der Ort des Poles die Durchschnittsgerade der gegebenen Ebene mit der Polarebene von $\mathfrak{m}$, und folglich (86) bilden diejenigen unter den Polarflächen der Puncte der gegebenen Ebene, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, ein Büschel.

88. Aus dem eben Auseinandergesetzten folgt:

1. Durch drei Puncte geht nur eine einzige Polarfläche. Der Pol derselben ist der Durchschnittspunct der Polarebenen der drei gegebenen Puncte.

2. Die ersten Polarflächen, die durch zwei feste Puncte gehen, bilden ein Büschel, das heisst, sie haben eine Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung gemein, die durch die beiden gegebenen Puncte geht; ihre Pole liegen auf der Durchschnittsgeraden der Polarebenen der beiden gegebenen Puncte.

3. Die ersten Polarflächen, die durch einen festen Punct gehen, bilden ein Netz, haben also $(\nu-1)^3$ Puncte gemein, den gegebenen eingeschlossen; ihre Pole liegen auf der Polarebene des gegebenen Punctes.

4. Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes bilden ein lineares System im engeren Sinne, das heisst dritter Stufe [2]).

Vier erste Polarflächen genügen, alle andere zu individualisieren, sobald sie nur nicht demselben Büschel oder demselben Netze angehören. Denn hätte man wirklich vier erste Polarflächen P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, deren Pole weder in gerader Linie, noch in derselben Ebene liegen, und man verlangte diejenige Polarfläche, welche durch drei gegebene Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$ geht, so hätte man folgendermassen zu verfahren. Die Flächenpaare $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, $P_1 P_4$ individualisieren drei Büschel; die Flächen, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen und bezüglich zu diesen drei Büscheln gehören, erzeugen ein Netz; die Flächen dieses Netzes, die durch $\mathfrak{o}'$ gehen, bilden ein Büschel, in welchem es nur eine einzige Fläche gibt, die durch $\mathfrak{o}''$ geht; diese ist offenbar die verlangte.

89. Im Allgemeinen besitzen die Flächen eines linearen Systems keine Puncte, die allen Flächen gemein sind. Wenn aber vier erste Polarflächen, deren Pole nicht in ein und derselben Ebene liegen, durch den nämlichen Punct gehen, so gehört dieser allen ersten Polarflächen an und ist für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct. Denn, da die Polarebene dieses Punctes

---

1) Bobillier, *a. a. O.*

2) Wo wir im Folgenden von linearen Systemen sprechen, verstehen wir stets, wenn wir keine andere Erklärung abgeben, solche dritter Stufe.

durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen kann (62), so ist sie unbestimmt, und da ausserdem die erste Polarfläche dieses Punctes durch ihn selbst hindurchgehen muss, so gehört er der Fundamentalfläche an; folglich u. s. w.

Haben im Allgemeinen vier erste Polarflächen, deren Pole nicht in derselben Ebene liegen, einen σ-fachen Punct $\mathfrak{d}$ gemein, so ist dieser auch für jede andere erste Polarfläche σ-fach, wie sich aus der Art der Ableitung dieser Polarflächen aus den vier gegebenen (88) unmittelbar ergiebt. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{d}$ muss durch $\mathfrak{d}$ gehen, also gehört dieser Punct auch der Fundamentalfläche an. Ausserdem gehen (85) die erste, zweite, . . ., $(\sigma \;\; 1)$-te Polarfläche jedes beliebigen Punctes des Raumes in Bezug auf eine beliebige der vorgenannten ersten Polarflächen durch $\mathfrak{d}$, oder mit andern Worten, die zweite, dritte, . . ., σ-te Polarfläche eines beliebigen Punctes des Raumes in Bezug auf F_ν gehen durch $\mathfrak{d}$. Daraus folgt, dass die $(\nu-2)$-te, $(\nu-3)$-te, . . . , $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$ unbestimmt sind, da sie durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen können; die $(\nu-\sigma-1)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$ ist ein Kegel $(\sigma+1)$-ter Ordnung. Folglich ist $\mathfrak{d}$ (71) ein $(\sigma+1)$-facher Punct für die Fundamentalfläche.

Dieses Theorem kann man auf andere Weise klar machen. Angenommen, die σ-ten Polarflächen aller Puncte des Raumes hätten einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{d}$, so gehört dieser auch der σ-ten Polarfläche des Punctes selbst an, und also auch der Fundamentalfläche. Der Punct $\mathfrak{d}$ hat ferner eine $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche, die durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen kann, und also unbestimmt ist. Die $(\nu-\sigma-1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ ist folglich ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$, und es ist somit $\mathfrak{d}$ ein $(\sigma+1)$-facher Punct der Fundamentalfläche.

90. Man setze jetzt voraus, die σ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ habe einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}'$. Nun gehen die $(\rho+1)$-te, $(\rho+2)$-te, . . ., $(\rho+\sigma-1)$-te Polarflächen von $\mathfrak{o}$ sämmtlich durch $\mathfrak{o}'$ und folglich (62) gehen die $(\nu-\rho)$-te, $(\nu-\rho-1)$-te, . . . , $(\nu-\rho-\sigma-1)$-te Polarflächen von $\mathfrak{o}'$ sämmtlich durch $\mathfrak{o}$. Ausserdem geht (85) auch die ϑ-te Polarfläche $(\vartheta=1,2,\ldots,\sigma-1)$ eines beliebigen Punctes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ $(\sigma-\vartheta)$-mal durch $\mathfrak{o}'$, und daraus folgt (84), dass die ϑ-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die $(\nu-\rho-\vartheta)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ geht. Danach ist (89) der Punct $\mathfrak{o}$ für die $(\nu-\rho-\vartheta)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ ein $(\vartheta+1)$-facher Punct; und geben wir ϑ seinen grössten Werth, so erhalten wir aus Allem den Satz:

Wenn die ρ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}'$ hat, so ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ für die $(\nu-\rho-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ ein σ-facher Punct.

91. Die ρ'-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$ genommen nach der ρ-ten Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}$ möge einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$ haben, das heisst, die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ habe den σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$. Wenden wir nun das eben (90) bewiesene Theorem auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ als Fundamentalfläche

betrachtet an, so ergibt sich, dass die $(\nu-\rho'-\rho-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}''$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen σ-fachen Punct in $\mathfrak{o}$ hat. Folglich gilt der Satz:

Hat die ρ'-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}$ einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$, so hat umgekehrt die $(\nu-\rho-\rho'-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}''$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen σ-fachen Punct in $\mathfrak{o}$.

92. Wir haben gesehen (69), dass die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes $\mathfrak{o}$ der Fundamentalfläche ein Kegel ist, der die entsprechende Wendeebene berührt, und dass die Berührungsgeneratrix die Osculierende von F_ν in $\mathfrak{o}$ ist. Auf dieser Geraden befindet sich daher der Scheitel $\mathfrak{o}'$ des Kegels. Wenden wir nun auf die beiden Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ einen früheren Satz (90) an, so folgt, weil $\mathfrak{o}'$ ein Doppelpunct für die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, dass die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen Doppelpunct in $\mathfrak{o}$ hat. Wir haben so den Satz:

Ein parabolischer Punct $\mathfrak{o}$ ist für jede erste Polarfläche ein Doppelpunct, deren Pol auf der Geraden liegt, welche die Fundamentalfläche in $\mathfrak{o}$ osculiert.

Hat ein Punct $\mathfrak{o}$, welcher der Fundamentalfläche angehört, einen Kegel als Quadripolarfläche, so ist er entweder ein Doppelpunct oder ein parabolischer Punct von F_ν. Denn, hat der Polarkegel seinen Scheitel in $\mathfrak{o}$, so ist dieser Punct für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct (71). Ist dagegen der Scheitel ein anderer Punct $\mathfrak{o}'$, so muss $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$, weil die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ in diesem Puncte die Fundamentalfläche berühren soll, die einzige Gerade sein, die in $\mathfrak{o}$ osculiert, das heisst, $\mathfrak{o}$ ist ein parabolischer Punct.

CAPITEL III.

ENVELOPPEN DER POLAREBENEN UND ORTE DER POLE.

93. Wir wollen jetzt die Enveloppen der Polarebenen der Puncte einer Geraden r in Bezug auf F_ν zu bestimmen versuchen. Die Polarebenen, welche durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ gehen, haben (62) ihre Pole auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{i}$, welche r in $\nu-1$ Puncten schneidet; das heisst, durch $\mathfrak{i}$ gehen $\nu-1$ Ebenen, von denen jede einen Pol auf r hat; die gesuchte Enveloppe ist folglich eine Developpable $(\nu-1)$-ter Classe. Wir geben ihr den Namen $(\nu-1)$*-te Polarfläche der Geraden* r.

Wenn die erste Polarfläche von $\mathfrak{i}$ durch r berührt wird, so fallen zwei von den $\nu-1$ Ebenen, die durch $\mathfrak{i}$ gehen, zusammen, und dieser Punct gehört also der Developpablen an. Folglich ist die Enveloppe der Polar-

ebenen der Puncte von r gleichzeitig der Ort der Pole der ersten Polarflächen, welche r berühren.

Ist t eine beliebige Gerade, so bilden die ersten Polarflächen der Puncte von t ein Büschel (86), in welchem bekanntlich $2(\nu-2)$ Flächen existieren, die eine beliebige Gerade, z. B. r, berühren. Folglich enthält t $2(\nu-2)$ Puncte des gesuchten Ortes und wir haben also den Satz:

Die $(\nu-1)$-*te Polarfläche von r ist eine Developpable* $2(\nu-2)$-*ter Ordnung.*

Ist $\mathfrak{m}$ ein Punct auf r, so haben die ersten Polarflächen, welche r in $\mathfrak{m}$ berühren, ihre Pole auf einer Geraden m, der Generatrix der Developpablen, die wir betrachten. Ist analog $\mathfrak{m}'$ der Punct von r, der auf $\mathfrak{m}$ unmittelbar folgt, so haben die ersten Polarflächen, welche r in $\mathfrak{m}'$ berühren, ihre Pole auf der Geraden m', der auf m unmittelbar folgenden Generatrix. Die erste Polarfläche, welche r in $\mathfrak{m}$ osculiert, hat folglich ihren Pol in dem Puncte, in welchem sich m und m' schneiden, und es ist also die Cuspidalcurve der Developpablen der Ort der Pole derjenigen ersten Polarflächen, welche r osculieren.

In einem Flächennetze $(\nu-1)$-ter Ordnung gibt es $3(\nu-3)$ Flächen, welche eine gegebene Gerade osculieren (75). Nun liegen, wenn die Flächen des Netzes erste Polarflächen in Bezug auf F_ν sind, ihre Pole in einer Ebene (88); eine beliebige Ebene enthält folglich $3(\nu-3)$ Puncte, deren erste Polarflächen r osculieren; das heisst: *Der Ort der Pole der ersten Polarflächen, die von r osculiert werden, ist eine Raumcurve* $3(\nu-3)$-*ter Ordnung*, welche die Rückkehrkante der obenerwähnten Developpablen bildet.

Da ein ebener Schnitt dieser Developpablen von der Ordnung $2(\nu-1)$ und der Classe $\nu-1$ ist und $3(\nu-3)$ Spitzen hat, so besitzt er $2(\nu-3)(\nu-4)$ Doppelpuncte; das heisst:

Der Ort der Pole der ersten Polarflächen, die r in zwei verschiedenen Puncten berühren, ist eine Raumcurve $2(\nu-3)(\nu-4)$-*ter Ordnung;* sie ist die Knotencurve der betrachteten Developpablen.

Auf die nämliche Art beweist man, dass *die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer beliebigen gegebenen Curve* μ-*ter Ordnung eine Developpable der* $\mu(\nu-1)$-*ten Classe ist, die man auch als Ort der Puncte auffassen kann, deren erste Polarflächen die gegebene Curve berühren.*

94. Wir werden jetzt die $(\nu-1)$-te Polarfläche einer Fläche von gegebener Ordnung μ betrachten, das heisst, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte dieser Fläche. Die Ebenen, welche durch eine beliebige Gerade t gehen, haben ihre Pole (86) auf einer Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung, welche die gegebene Fläche in $\mu(\nu-1)^2$ Puncten schneidet. Die gesuchte Enveloppe ist also eine Fläche der $\mu(\nu-1)^2$-ten Classe.

Fallen zwei von den ebengenannten $\mu(\nu-1)$ Puncten zusammen, so berührt t die Fläche, um die es sich handelt, und wenn folglich zwei Geraden t, t', die durch denselben Punct $\mathfrak{i}$ gehen, zwei Curven entsprechen, welche die gegebene Fläche in demselben Puncte $\mathfrak{i}'$ berühren, so ist $\mathfrak{i}'$ der Pol der

Ebene tt', und diese Ebene berührt die Fläche der $\mu(\nu-1)^2$-ten Ordnung in $\mathfrak{i}$. In diesem Falle berührt aber die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{i}$, da sie beide Raumcurven enthält, die gegebene Fläche in $\mathfrak{i}$, und wir haben also:

Die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer gegebenen Fläche ist gleichzeitig der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen die gegebene Fläche berühren.

Die $(\nu-1)$-te Polarfläche einer Ebene ist eine Fläche $3(\nu-2)^2$-ter Ordnung, da es in einem Büschel von Flächen $(\nu-1)$-ter Ordnung $3(\nu-2)^2$ gibt, die eine gegebene Ebene berühren (41).

95. Was ist der Ort der Pole der Tangentialebenen einer gegebenen Fläche μ-ter Classe? Durch eine beliebige Gerade t gehen μ Tangentialebenen der gegebenen Fläche, die ihre Pole sämmtlich auf der Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung haben, welche die erste Polare von t bildet (86). Diese Curve hat $\mu(\nu-1)^3$ Durchschnittspuncte mit dem gesuchten Orte, da dies die Anzahl der Pole von μ Ebenen ist. Der gesuchte Ort ist folglich eine Fläche von der $\mu(\nu-1)$-ten Ordnung.

Ist t eine Tangente der gegebenen Fläche, so fallen zwei jener μ Ebenen zusammen, und folglich hat die Raumcurve, welche die erste Polare von t ist, $(\nu-1)^3$ Berührungspuncte mit dem Orte, um den es sich handelt. Und wenn zwei Gerade t, t' in dem nämlichen Puncte $\mathfrak{i}$ die gegebene Fläche berühren, so berühren die diesen Geraden entsprechenden Raumcurven den Ort in den nämlichen $(\nu-1)^3$ Puncten, und da die beiden Curven gleichzeitig auf der ersten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{i}$ liegen, so sind die $(\nu-1)^3$ Pole der Ebene tt' ebensoviel Berührungspuncte zwischen dem Orte und der ersten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{i}$; das heisst:

Der Ort der Pole der Tangentialebenen einer gegebenen Fläche ist auch die Enveloppe der ersten Polarflächen der Puncte der gegebenen Fläche.

Jede Eingehüllte hat mit der Einhüllenden $(\nu-1)^3$ Berührungspuncte, welche die Pole der Ebenen sind, die die gegebene Fläche in dem Pole der Eingehüllten berühren.

Die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{i}$ schneidet den Ort in einer Curve $\mu(\nu-1)^2$-ter Ordnung, welche offenbar der Ort der Pole derjenigen Ebenen ist, die man durch $\mathfrak{i}$ so ziehen kann, dass sie die gegebene Fläche berühren, das heisst der Tangentialebenen des Kegels mit dem Scheitel $\mathfrak{i}$, welcher der gegebenen Fläche umgeschrieben ist.

Der Fläche $\mu(\nu-1)$-ter Ordnung, die wir eben als Ort und als Enveloppe betrachteten, geben wir den Namen *erste Polarfläche der gegebenen Fläche.*

96. Die gegebene Fläche sei jetzt developpabel und von der μ-ten Classe. Man sucht auch für sie den Ort der Pole ihrer Tangentialebenen. Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ kann man μ Tangentialebenen der gegebenen Developpablen legen; diese Ebenen haben ihre $\mu(\nu-1)^3$ Pole alle auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ und diese Puncte sind ebensoviele Puncte des Ortes. Der

gesuchte Ort ist also in diesem Falle eine Raumcurve der $\mu(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Liegt o auf der Developpablen, so fallen zwei von den μ Tangentialebenen zusammen, und folglich berührt die erste Polarfläche von o den Ort n $(\nu-1)^3$ Puncten. Der Ort ist daher auch die Enveloppe der ersten Polarflächen der Puncte der gegebenen Fläche in dem Sinne, dass die gefundene Curve von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der gegebenen Developpablen in $(\nu-1)^3$ Puncten berührt wird. Dieselbe Curve wird von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der Rückkehrcurve der Developpablen in $(\nu-1)^3$ Puncten osculiert, und von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der Knotencurve derselben Developpablen in $2(\nu-1)^3$ Puncten berührt.

CAPITEL IV.

ANWENDUNGEN AUF DEVELOPPABLE FLÄCHEN.

97. Wir wollen jetzt annehmen, die Fundamentalfläche F sei eine Developpable von der Ordnung ρ und der Classe μ, mit ω Doppelgeneratrixen, θ stationären Generatrixen, einer Cuspidalcurve ν-ter Ordnung, die β stationäre und ϑ' Doppelpuncte besitzt, und einer Knotencurve von der Ordnung ξ. Es sei ausserdem:

α die Zahl der stationären Tangentialebenen und

γ' die Zahl der Bitangentialebenen von F (das heisst, der längs zweier getrennter Geratrixen berührenden Ebenen);

ϑ die Zahl der Geraden, die man von einem beliebigen Puncte so ziehen kann, dass sie die Curve (ν) zweimal treffen;

γ die Zahl der Geraden die gleichzeitig in einer beliebigen Ebene und in zwei Tangentialebenen von F liegen;

η die Classe der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν);

$\varkappa$ die Zahl der Geraden, welche durch einen beliebigen Punct gehen, und die Curve (ξ) in zwei Puncten schneiden;

λ die Zahl der Puncte der Curve (ν), durch welche Gerade gehen, welche diese Curve anderweitig berühren: diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär;

τ die Zahl der Puncte, die in drei getrennten Generatrixen von F liegen: diese Puncte sind offenbar für die Curve (ξ) dreifach.

Zwischen diesen Zahlen haben wir (10, 12) die Gleichungen:

$$\rho = \mu(\mu-1)-2(\gamma+\gamma')-3\alpha,$$
$$\rho = \nu(\nu-1)-2(\delta+\delta')-3\beta,$$
$$\mu = \rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta),$$
$$\nu = \rho(\rho-1)-2(\eta+\omega)-3(\mu+\theta),$$
$$3\rho-\theta = 3\mu+\nu-\alpha = 3\nu+\mu-\beta,$$
$$2(\xi+\omega)+\beta = 2(\eta+\omega)+\alpha = \rho(\rho-4)-2\theta,$$

welche sechs unabhängigen Relationen gleichgelten. Wir wollen jetzt drei andere Gleichungen bestimmen, welche zur Bestimmung von λ, τ, $\varkappa$ dienen [1]).

98. Es sei $\mathfrak{o}$ ein willkürlicher Punct. Jede Ebene, die durch $\mathfrak{o}$ geht, schneidet dann F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ mit $\xi+\omega$ Doppelpuncten und $\nu+\theta$ Stillstandspuncten (9). Dieselbe Ebene schneidet die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F in einer Curve der $(\rho-1)$-ten Ordnung, welche durch die $\xi+\omega$ Doppelpuncte und die $\nu+\theta$ Stillstandspuncte von l hindurchgeht. In diesen letzten Puncten hat sie mit der Curve l dieselben Tangenten [2]). Daraus folgt, dass die Classe der Curve l gleich ist:

$$\mu = \rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta),$$

da dieses die Zahl der Tangenten ist, die man von $\mathfrak{o}$ an genannte Curve ziehen kann. Diese Tangenten sind auf der Schnittebene die Spuren der Tangentialebenen von F, die durch $\mathfrak{o}$ gehen. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F schneidet daher F längs der beiden Curven (ξ), (ν), längs der $\omega+\theta$ doppelten und stationären Generatrixen und längs der Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen, die durch $\mathfrak{o}$ gehen.

Die Gleichung

$$\rho(\rho-1) = \mu+2(\xi+\omega)+3(\nu+\theta)$$

zeigt, dass bei dem vollständigen Durchschnitt von F und der ersten Polarfläche die Curve (ξ) und die ω Geraden zweimal zählen, während die Curve (ν) und die θ Geraden dreimal zu rechnen sind. Die nämliche Gleichung lässt erkennen, dass der umgeschriebene Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$ aus den μ Tangentialebenen, dem Perspectivkegel der Curve (ξ) zweimal gezählt, dem dreimal gerechneten Perspectivkegel der Curve (ν) und aus den $\omega+\theta$ Ebenen zusammengesetzt ist, welche durch die doppelten und die stationären Geraden hindurchgehen, jene zweimal und diese dreimal gezählt.

99. Ist die schneidende Ebene, die wir durch $\mathfrak{o}$ gelegt haben, eine der μ Tangentialebenen, und ist t die Berührungsgeneratrix und $\mathfrak{m}$ der Punct, in welchem t die Curve (ν) berührt, dann erhält der Schnitt l der Developpa-

---

1) Cfr. Salmon, *Geometry of three dimensions* (2d ed.) pag. 455 u. ff., wo aber die Singularitäten $\omega, \theta, \delta', \gamma'$ nicht beachtet sind. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde der Verfasser durch den Rath der Herren Cayley und Zeuthen unterstützt, denen er hierdurch seinen herzlichsten Dank ausspricht.

2) *Einleitung*, No. 74.

blen F (13) in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct mit drei Zweigen, welche von derselben Tangente t berührt werden. Die erste Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l hat also in $\mathfrak{m}$ eine Spitze mit der Tangente t, und die zweite Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die nämliche Curve l geht durch $\mathfrak{m}$ und wird in diesem Puncte von der Geraden t berührt. Folglich ist t in $\mathfrak{m}$ Tangente der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F; oder auch:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine developpable Fläche berührt die Cuspidalcurve in den Puncten, wo diese von Ebenen osculiert wird, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen.

Der Schnitt l ist aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung zusammengesetzt, welche von t in $\mathfrak{m}$ berührt und in anderen $\rho-4$ Puncten geschnitten wird — es sind dies die Puncte, in denen die Curve (ξ) von der Ebene $\mathfrak{o}t$ berührt wird —; diese Puncte sind für l dreifach, also geht durch sie auch die zweite Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l; wir haben also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine Developpable berührt die Berührungsgeneratrix jeder Tangentialebene, die durch $\mathfrak{o}$ geht, in dem Puncte, wo sie von der Cuspidalcurve berührt wird, und schneidet sie in den Puncten, wo sie die Knotencurve trifft.

100. Es sei jetzt t eine der θ stationären Generatrixen und $\mathfrak{m}$ der Berührungspunct zwischen t und der Curve (ν). Man lege die Ebene $\mathfrak{o}t$ bis sie F schneidet, dann besteht der Schnitt l aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ, die in $\mathfrak{m}$ mit t einen vierpunctigen Contact hat, weil t in drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und man also von einem beliebigen Puncte von t aus $\mu-3$ von t verschiedene Tangenten an den Schnitt legen kann; t repräsentiert daher drei unmittelbar folgende Tangenten von l'. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ schneidet die Curve (ν) in anderen $\nu-3$ Puncten und die anderen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; l' hat also $\nu+\theta-4$ Spitzen. Diese Curve hat folglich

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)]=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncte (10). Diese Puncte gehören der Linie $(\xi+\omega)$ an; von den andern Durchschnittspuncten der Ebene $\mathfrak{o}t$ mit der Curve (ξ) sind $2(\rho-6)$ in den $\rho-6$ Durchschnittspuncten zwischen l' und t vereinigt, und folglich fallen die drei übrigen mit $\mathfrak{m}$ zusammen. Die ebenerwähnten $\rho-6$ Puncte sind für die Curve (ξ) Stillstandspuncte, weil in jedem derselben zwei unmittelbar folgende Generatrixen — repräsentiert durch die stationären Generatrixen — von einer nicht folgenden Generatrix geschnitten werden.

Schneidet man F durch die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t dreimal gezählt und einer Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung und $(\mu-1)$-ter Classe, die in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t hat, weil t in drei unmittelbar

folgenden Tangentialebenen liegt, von denen die eine die Ebene der Curve ist, und folglich zwei unmittelbar folgende Tangenten dieser Curve darstellt. Die Ebene schneidet die Curve (ν) in weiteren $\nu-4$ Puncten und die übrigen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; die Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung hat also $\nu+\theta-5$ Spitzen und daher

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)]=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte. Die Ebene hat also mit der Doppelcurve einen vierpunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ und einen dreipunctigen Contact in jedem der $\rho-6$ Durchschnittspuncte von t mit der ebenen Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung. Folglich haben die Curven (ν) und (ξ) in $\mathfrak{m}$ dieselbe Singularität, das heisst, dieselbe Tangente t mit dreipunctigem Contact und dieselbe Osculationsebene mit vierpunctigem Contact. Die stationäre Tangente t trifft die Curve (ξ) in $\rho-6$ stationären Puncten, und die Tangenten in diesen Puncten liegen in der Osculationsebene von $\mathfrak{m}$.

Der nämliche Punct $\mathfrak{m}$, in dem die Curven (ν) und (ξ) von der stationären Geraden t osculiert werden, ist für die Developpable F dreifach, weil eine beliebige Ebene durch t F in einer Curve schneidet, die mit drei Zweigen durch $\mathfrak{m}$ geht, das heisst, jede Gerade durch $\mathfrak{m}$ hat hier einen dreipunctigen Contact mit F. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ mit F einen vierpunctigen Contact haben, liegen in der Osculationsebene, das heisst (71), der Berührungskegel von F in $\mathfrak{m}$ reduciert sich auf diese Ebene dreimal gezählt. Es folgt noch (85), dass die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$ geht und in ihm jene Ebene zur Tangentialebene hat. Ausserdem bemerke man, dass jeder Punct, der der Geraden t und der Curve l' in der Ebene $\mathfrak{o}t$ gemein ist, für l dreifach sein muss und also auch in der zweiten Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l liegt; folglich hat die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F in $\mathfrak{m}$ eine vierpunctige Berührung mit t. Man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat einen vierpunctigen Contact mit der Cuspidalcurve und mit der Knotencurve in dem Puncte, in dem diese Curven von jeder stationären Generatrix osculiert werden.

Die $\rho-6$ Puncte, in denen t die Curve (ξ) trifft, sind für F dreifache Puncte nach dem nämlichen Raisonnement, das wir schon für den Punct $\mathfrak{m}$ angewandt haben; daher geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch diese Puncte.

Wenn $\mathfrak{r}$ einer dieser Puncte ist, in denen t von der Geraden geschnitten wird, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ berührt, so ist der Tangentialkegel von F in $\mathfrak{r}$ aus der doppeltgezählten Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ und der Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ zusammengesetzt. Die gemeinschaftliche Gerade dieser Ebenen ist die Cuspidaltangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{r}$, und durch sie geht die Tangentialebene in $\mathfrak{r}$ der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F; also zählt $\mathfrak{r}$ für drei Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der obengenannten zweiten Polarfläche.

101. Es sei jetzt t eine der ω Doppelgeneratrixen, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ ihre Berührungspuncte mit der Curve (ν), und man wende auf sie dieselben Betrachtungen an, die wir für eine stationäre Generatrix durchgeführt haben. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ gibt hier eine Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ mit $\nu+\theta-4$ Spitzen, also mit

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)]=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncten, von denen $\omega-1$ in den $\omega-1$ andere Doppelgeneratrixen liegen, während die andern $\xi-2\rho+10$ der Knotencurve angehören. Die Curve l' hat in jedem der Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ mit t einen dreipunctigen Contact, weil diese Gerade in zwei Paar unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und folglich fallen von den μ Tangenten von l', die von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{p}$ von t ausgehen, zwei mit $\mathfrak{pm}$ und zwei andere mit $\mathfrak{pm}'$ zusammen. Es folgt, dass t die l' in andren $\rho-2-2.3$ Puncten trifft, das heisst, die Doppelgeneratrix t schneidet $\rho-8$ einfache Generatrixen. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ hat folglich mit der Knotencurve $2(\rho-8)$ Durchschnittspuncte, die zu zwei und zwei in obengenannten $\rho-8$ Puncten vereinigt sind, und 6 Durchschnittspuncte, die zu drei und drei in die Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammenfallen[1]). Also hat t in $\mathfrak{m}$ und in $\mathfrak{m}'$ einen dreipunctigen Contact mit der Curve (ξ).

Da $\mathfrak{m}$ ein dreifacher Punct von F ist, so geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$. Ausserdem hat diese zweite Polarfläche, da jeder gemeinschaftliche Punct von t und l' für den vollständigen Durchschnitt der Ebene $\mathfrak{o}t$ mit F dreifach ist, in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t. Diese Gerade hat aber in diesem Puncte eine zweipunctige Berührung mit der Curve (ν) und eine dreipunctige mit der Curve (ξ); folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes in Bezug auf eine Developpable geht durch die Berührungspuncte der Cuspidalcurve mit ihren Doppeltangenten und hat daselbst eine zweipunctige Berührung mit jener Curve und eine dreipunctige mit der Knotencurve.

Die $\rho-8$ für F dreifachen Puncte, in denen t andere Generatrixen schneidet, sind für die Curve (ξ) Doppelpuncte. Ist in der That $\mathfrak{r}$ einer von ihnen, in dem t von der Tangente der Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ getroffen wird, so wird dort die Curve (ξ) von den beiden Geraden berührt, längs deren die Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ die Osculationsebenen in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ schneidet. Folglich

---

1) Dass die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ geht, ergibt sich auch, wenn man beachtet, dass z. B. $\mathfrak{m}$ für F ein dreifacher Punct ist, weil sich in ihm drei Tangenten der Curve (ν) schneiden, nämlich die Tangenten in $\mathfrak{m}$, im unendlich nahen Puncte von $\mathfrak{m}$ und im Puncte $\mathfrak{m}'$. Also besitzt der von einer beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene auf F erzeugte Schnitt hier drei Zweige, von denen zwei durch die Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}$ und der dritte von der Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}'$ berührt werden. Es folgt, dass $\mathfrak{m}$ so viel als eine Spitze und zwei Knotenpuncte des Schnittes gilt; und folglich geht ausser der Curve (ν) und einer der ω Doppelgeraden auch die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$.

stellt jeder dieser $\rho-8$ Puncte zwei Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ dar.

Schneidet man die Fläche F durch die Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t, dreimal genommen und einer Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung und $(\nu-1)$-ter Classe mit $\mu+\theta-5$ Spitzen, welche mit t in $\mathfrak{m}$ eine zweipunctige und in $\mathfrak{m}'$ eine dreipunctige Berührung eingeht. Diese Curve hat also

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)]=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-3\rho+15$ der Knotencurve angehören. Die andern Durchschnittspuncte der schneidenden Ebene mit der Curve (ξ) sind die $\rho-8$ genannten Puncte, jeder dreimal gezählt, und die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammen als 9 Puncte gezählt, nämlich $\mathfrak{m}$ sechsmal und $\mathfrak{m}'$ dreimal. Die Ebene also, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ osculiert, hat dort einen sechspunctigen Contact mit der Curve (ξ) und ausserdem mit derselben Curve einen dreipunctigen Contact in $\rho-7$ andern Puncten, von denen einer $\mathfrak{m}'$ ist.

102. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct der Cuspidalcurve; t, t' die Tangenten und P, P' die Osculationsebenen der beiden Zweige der Curve. Bezeichnen wir durch t_1, t'_1 die zu t, t' unendlich nahen Generatrixen von F, so sieht man unmittelbar, dass $\mathfrak{m}$ ein vierfacher Punct der Fläche F ist, weil er in vier Generatrixen t, t_1, t', t'_1 liegt. Es ist gleichfalls klar, dass $\mathfrak{m}$ auch für die Knotencurve vierfach ist, weil er den Durchschnittspunct von vier Paar nicht unmittelbar folgenden Generatrixen tt', tt'_1, $t't_1$, $t_1t'_1$ darstellt. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ einen fünfpunctigen Contact mit F haben, liegen sämmtlich in den Ebenen P, P'; folglich stellen diese Ebenen, zweimal gezählt, den Berührungskegel von F im vierfachen Puncte dar. Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F hat in $\mathfrak{m}$ einen Biplanarpunct, und die beiden Tangentialebenen gehen durch die Gerade PP', welche zugleich die Tangente der Curve (ξ) in diesem Puncte ist.

Hieraus ergibt sich gerades Wegs, dass in $\mathfrak{m}$ vier Durchschnittspuncte der Curve (ν) mit der zweiten Polarfläche vereinigt sind.

103. Ein stationärer Punct der Curve (ν) ist für F dreifach, da jede Gerade, die durch diesen Punct gezogen ist, in ihm drei aufeinanderfolgende Generatrixen schneidet. Der Tangentenkegel von F in diesem Puncte besteht aus der dreimal genommenen Ebene, die in ihm einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, weil diese Ebene der Ort der Geraden ist, die in genanntem Puncte mit F einen vierpunctigen Contact haben; folglich geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch diesen Punct und hat in ihm genannte Ebene zur Tangentialebene. Also haben wir:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine Developpable, hat mit der Cuspidalcurve in ihren Stillstandspuncten eine vierpunctige Berührung.

104. Die Puncte der Curve (ν), durch welche die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht, sind diejenigen, deren Quadripolarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen, und

diejenigen, deren Quadripolarflächen unbestimmt werden. Die ersten Puncte sind diejenigen, in denen die Curve (ν) von den μ Tangentialebenen von F osculiert wird, die durch $\mathfrak{o}$ gehen. Die zweiten Puncte dagegen sind für die Fläche dreifach oder vierfach (71), das heisst, sie liegen in drei oder vier Generatrixen. Unter diesen Puncten sind in der Cuspidalcurve, ausser den β stationären und den ϑ' Doppelpuncten und ausser den $2\omega+\theta$ Berührungspuncten der doppelten und der stationären Tangenten, auch die λ Puncte, in denen zwei auf einanderfolgende Generatrixen von einer nicht unmittelbar folgenden zugleich geschnitten werden. Diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär, aber für die Curve (ν) nur einfach; und diese wird in ihnen von der zweiten Polarfläche nicht berührt. Also hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine Developpable schneidet die Cuspidalcurve in den Puncten, in welchen diese von Geraden geschnitten wird, die sie anderswo berühren.

Auf diese Weise sind die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ mit der Curve (ν) dargestellt durch die Gleichung:

$$\nu(\rho-2)=2\mu+4\theta+2.2\omega+4\vartheta'+4\beta+\lambda.$$

Aus ihr ergibt sich:

$$\lambda=\nu\rho-2(\mu+\nu+2\theta+2\omega+2\vartheta'+2\beta),$$

oder auch mit Hilfe der Formeln von CAYLEY [1]):

$$\lambda=\nu(\rho+4)-6(\rho+\beta)-4(\omega+\vartheta')-2\theta.$$

105. Wir haben schon (98) gesehen, dass die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ die Knotencurve (ξ) in den $\mu(\rho-4)$ Puncten schneidet, wo diese von den Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen von F, die durch $\mathfrak{o}$ gehen, getroffen wird. Dies sind diejenigen Puncte der Curve (ξ), deren Quadripolarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen. Eine solche Polarfläche besteht aus den zwei Ebenen, welche in demselben Puncte die Fläche F berühren und von denen eine durch $\mathfrak{o}$ geht.

Die übrigen Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ sind Puncte, deren Quadripolarfläche unbestimmt ist, das heisst, es sind die dreifachen und vierfachen Puncte von F, deren Zahlen sind:

$$\theta,\ \theta(\rho-6),\ 2\omega,\ \omega(\rho-8),\ \vartheta',\ \beta,\ \lambda,\ \tau.$$

Wir haben schon gesehen, dass jeder der θ, $\theta(\rho-6)$, 2ω, $\omega(\rho-8)$ Puncte bezüglich für 4, 3, 3, 2 Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ gilt; jetzt wollen wir zur Betrachtung der anderen Puncte übergehen.

106. Es sei $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct der Cuspidalcurve und man halte die Benennungen der Nr. 102 fest. Eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene M schneidet F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ, die in

---

[1]) Das heisst, indem man für μ den gleichgeltenden Ausdruck $3(\rho-\nu)+\beta-\theta$ setzt (97).

𝔪 einen vierfachen Punct hat (vier Doppelpuncten und zwei Spitzen gleichgeltend); in ihm werden zwei Zweige von der Spur von P und die beiden andern von der Spur von P' berührt. Geht die Schnittebene durch die Tangente t, so zerfällt der Schnitt l in die Gerade t und eine Curve l' der $(\rho-1)$-ten Ordnung und μ-ter Classe, die in 𝔪 einen dreifachen Punct hat. Dort hat ein Zweig t zur Tangente während die beiden andern von der Spur von P' berührt werden. Die Ebene schneidet die Linie $(\nu+\theta)$ anderswo noch in $\nu+\theta-3$ Puncten, die Spitzen von l' bilden, und da 𝔪 für zwei Doppelpuncte und eine Spitze zu zählen ist, so hat l' noch andere

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)]-2=\xi+\omega-\rho+2$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-\rho+2$ in der Curve (ξ) liegen. Von den andern $\rho-2$ Durchschnittspuncten dieser Curve mit der Ebene sind 4 im Puncte 𝔪 vereinigt und $\rho-6$ befinden sich in den andern Durchschnittspuncten von t und l', das heisst t trifft ausser t' noch $\rho-6$ Generatrixen und hat folglich in 𝔪 mit l einen fünfpunctigen Contact.

Wir setzen jetzt voraus, die schneidende Ebene fiele mit der Tangentialebene P zusammen. Dann ist der Schnitt l aus der zweimal genommenen Geraden t und einer Curve l'' der $(\rho-2)$-ten Ordnung und $(\mu-1)$-ten Classe zusammengesezt, die in 𝔪 einen dreifachen Punct hat — weil alle durch 𝔪 in der Ebene P gezogene Geraden in ihm mit F eine fünfpunctige Berührung eingehen —; in ihm wird ein Zweig von t berührt, und die andern beiden von der Geraden PP'. Die Curve l'' hat andere $\nu+\theta-4$ Spitzen, sie besitzt also ausser den beiden in 𝔪 vereinigten Doppelpuncten noch

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)]-2=\xi+\omega-2\rho+6$$

andere. Die übrigen $2\rho-6$ Durchschnittspuncte von P mit der Curve (ξ) werden von den $\rho-6$ Puncten, in denen t andere Generatrixen von F als t' schneidet, und dem Puncte 𝔪 gebildet; folglich hat die Ebene P mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in jedem der genannten $\rho-6$ Puncte und einen sechspunctigen Contact in 𝔪. Ein ähnlicher Schluss lässt sich für die Ebene P' machen, und folglich hat die Gerade PP' mit der Curve (ξ) im Puncte 𝔪 sechs vereinigte gemeinschaftliche Puncte.[1]) Diese Gerade ist aber auch die Durchschnittsgerade der Tangentialebenen der zweiten Polarfläche von 𝔬 in dem Biplanarpuncte 𝔪; und also haben wir:

---

[1]) Eine beliebig durch die Gerade PP' gelegte Ebene schneidet F in einer Curve l von der ρ-ten Ordnung und der μ-ten Classe mit vier in 𝔪 sich kreuzenden Zweigen und einer einzigen Tangente PP', mit der sie in diesem Puncte einen sechspunctigen Contact hat. Dieselbe Ebene trifft die Cuspidalcurve in andern $\nu-2$ und die Knotencurve in andern $\xi-6$ Puncten. Die Curve l hat also in 𝔪 eine Singularität, welche 6 Doppelpuncten und 2 damit vereinigten Spitzen entspricht und folglich die Verminderung um $6.2+2.3=18$ in der Classenzahl und von $6.6+2.8=52$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Ein Doppelpunct der Cuspidalcurve ist für die Knotencurve vierfach und gilt für zwölf Durchschnittspuncte der letzteren Curve mit der zweiten Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf die gegebene Developpable.

107. Ist m einer der β Stillstandspuncte der Curve (ν), und t die entsprechende Tangente, so schneidet die Ebene, welche F längs t berührt die Curve (ν) in anderen $\nu-4$ Puncten, das heisst, die Curve ($\rho-2$)-ter Ordnung, welche F und genannter Ebene gemein ist, hat wohl noch $\nu+\theta-3$ Spitzen, wie im Allgemeinen für eine ganz beliebige Tangentialebene, aber eine derselben fällt auf m. Die ebene Curve hat in m die Tangente t, von der sie noch in $\rho-5$ anderen Puncten geschnitten wird, und da sie ausserdem von der ($\mu-1$)-ten Classe ist, so hat sie

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)]=\xi+\omega-2\rho+8$$

Doppelpuncte, und folglich berührt die Ebene, welche in m einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, die Curve (ξ) in m und in anderen $\rho-5$ Puncten der Geraden t. Die nämliche Ebene berührt in m die zweite Polarfläche von o, und man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable berührt die Knotencurve in den Stillstandspuncten der Cuspidalcurve.

Eine beliebig durch die Cuspidaltangente t der Curve (ν) gelegte Ebene schneidet F in dieser Geraden t und in einer Curve ($\rho-1$)-ter Ordnung und μ-ter Classe, für welche m die Vereinigung einer Spitze und eines Doppelpunctes darstellt[1]); es gibt ausserdem noch $\nu+\theta-3$ andere Spitzen und folglich

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)]-1=\xi+\omega-\rho+3$$

Doppelpuncte. Die Gerade t trifft nur $\rho-5$ von ihr selbst verschiedene Generatrixen, das heisst, sie schneidet die ebene Curve in $\rho-5$ Puncten — oder hat auch in m mit ihr einen vierpunctigen Contact — und folglich hat die Ebene mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in m. Also erhält man:

---

1) Eine beliebige Ebene schneidet F in einer Curve l der ρ-ten Ordnung und μ-ter Classe mit $\xi+\omega$ Knotenpuncten und $\nu+\theta$ Spitzen, woraus man

$$\mu=\rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta)$$

zieht. Geht die Ebene durch einen der α Berührungspuncte der stationären Ebenen, so haben wir in ihm eine Spitze, einen Knoten- und einen Wendepunct vereinigt. Die Curve l hat in diesem Puncte zwei Zweige, weil der Punct für F ein Doppelpunct ist, mit derselben Tangente, deren Berührung ferner vierpunctig ist, da diese Tangente in der Wendeebene liegt. Man hat so in der Curve l eine Singularität, welche die Verminderung $3+2$ in der Classe und $8+6+1$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Geht die schneidende Ebene durch einen der β stationären Puncte der Curve (ν), so hat in ihm die Curve l drei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden. Diese Singularität umfasst zwei mit einem Knotenpunct vereinigte Spitzen.

In den stationären Puncten der Cuspidalcurve einer Developpablen haben die Cuspidal- und Knotencurve dieselben Tangenten.

108. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ einer der λ Puncte der Curve (ν), die in zwei Tangenten liegen. Es sei t die Tangente in $\mathfrak{m}$ und t' die andre Tangente, die auch durch $\mathfrak{m}$ geht. Der Berührungskegel von F in $\mathfrak{m}$ — oder auch (71) die cubische Polarfläche von $\mathfrak{m}$ — ist dann aus drei Ebenen zusammengesetzt, von denen zwei mit der Ebene zusammenfallen, welche F längs t berührt, und die dritte ist die Tangentialebene längs t'. Die Durchschnittsgerade t'' dieser beiden Tangentialebenen ist die Cuspidaltangente der Knotencurve in $\mathfrak{m}$.

Die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht durch $\mathfrak{m}$ und wird dort von einer Ebene, die durch t'' geht, berührt, das heisst, von einer Ebene, welche mit der Curve ξ einen dreipunctigen Contact hat; folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat mit der Knotencurve in jedem Puncte einen dreipunctigen Contact, welcher für diese ein Stillstandspunct und für die Cuspidalcurve ein einfacher Punct ist.

109. Jeder der dreifachen Puncte von F, in dem drei *getrennte* Generatrixen zusammenlaufen, ist offenbar für die Curve (ξ) ebenfalls dreifach und ist auch ein Punct der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$.

Die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ mit der Curve (ξ) werden daher durch folgende Gleichung repräsentiert:

$$\xi(\rho-2)=\mu(\rho-4)+2\beta+3\lambda+3\tau+4\theta+3\theta(\rho-6)+3.2\omega+2\omega(\rho-8)+12\vartheta'.$$

Setzt man hierin für λ seinen Werth (104), so entsteht:

$$3\tau=(\xi-\mu-3\nu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\mu+20\theta)+10\beta+18\omega.$$

Mittelst des Princips der Dualität erhält man aus den Zahlen λ, τ folgende andere Zahlen:

$$\lambda_1=\mu(\rho+4)-6(\rho+\alpha)-4(\omega+\gamma')-2\theta,$$

$$3\tau_1=(\eta-\nu-3\mu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\nu+20\theta)+10\alpha+18\omega,$$

wo λ_1 die Zahl der Ebenen bedeutet, von denen jede die Curve (ν) in einem Puncte osculiert und in einem andern berührt, und τ_1 die Zahl der Ebenen, welche die Curve (ν) in drei getrennten Puncten berühren.

110. Existieren auf einem Kegel ξ-ter Ordnung zwei Curven, die nicht durch den Scheitel gehen und jede Generatrix bezüglich in σ_1, σ_2 Puncten

---

Geht die schneidende Ebene durch einen der λ stationären Puncte der Curve (ξ), so erhalten wir in ihm drei Zweige der Curve l mit zwei verschiedenen Tangenten, eine Singularität, welche der Vereinigung einer Spitze mit zwei Knotenpuncten entspricht.

Geht die schneidende Ebene durch einen der θ Berührungspuncte der Curven (ν), (ξ) mit den stationären Geraden, so hat in ihnen die Curve l zwei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden, und diese Singularität entspricht zwei mit einem Knotenpunct vereinigten Spitzen. U. s. w., u. s. w.

schneiden, so ist die Zahl der beiden Curven gemeinschaftlichen Puncte gleich $\xi\sigma_1\sigma_2$. Diese Behauptung, die an sich klar ist, wenn die beiden Curven die Durchschnitte des Kegels mit zwei Flächen bezüglich der σ_1-ten, σ_2-ten Ordnung sind, nehmen wir hier für allgemeingiltig an.

Dies vorausgeschickt bemerke man, dass der Perspectivkegel der Knotencurve (ξ) vom Scheitel $\mathfrak{o}$ mit der Developpablen F die Curve (ξ) gemein hat, die zweimal zu zählen ist, und also diese Fläche noch in einer anderen Curve c der $\xi(\rho-2)$-ten Ordnung schneidet, die mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-2$ Puncte gemein hat. Nimmt man auf jeder Generatrix des Kegels die harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-3)$-ten Grades des Systems der $(\rho-2)$ Puncte von c in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol, so ist der Ort dieser harmonischen Mittelpuncte — genau wie für die ebenen Curven[1]) — eine Curve c' von der $\xi(\rho-3)$-ten Ordnung und hat mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-3$ Puncte gemein. Die beiden Curven c, c' haben $\xi(\rho-2)(\rho-3)$ Puncte gemein, und zwar die folgenden:

a. Die Berührungspuncte der Curve c mit Tangenten, welche gleichzeitig Generatrixen des Kegels (ξ) sind. Aber die Tangenten, welche sich von $\mathfrak{o}$ an F ziehen lassen, haben ihre Berührungspuncte auf μ Geraden (Generatrixen von F), welche (13) den Kegel (ξ) in $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncten, die nicht auf der Curve (ξ) liegen, treffen. Diese $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncte sind folglich ebensoviele Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

b. Die Puncte, in welchen die Curve (ξ) von den $\varkappa$ Doppelgeneratrixen des Kegels (ξ) getroffen wird. Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei Puncte der Curve (ξ) mit $\mathfrak{o}$ in gerader Linie. Wir betrachten die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels wie zwei verschiedene Generatrixen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$. Die erste derselben trifft zunächst die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$, schneidet dann F in zwei mit $\mathfrak{p}_2$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ...; die zweite dagegen schneidet, nachdem sie die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_2$ getroffen, die Fläche F in zwei mit $\mathfrak{p}_1$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... Die Ebene, welche durch $\mathfrak{o}$ und durch die Tangenten der Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$ (oder in $\mathfrak{p}_2$) geht schneidet die beiden Tangentialebenen von F in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) längs zwei Geraden, welche in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) Tangenten der Curve c sind; die beiden Ebenen, die durch $\mathfrak{o}$ und bezüglich durch die Tangenten der Curve (ξ) in den Puncten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ gehen, schneiden die Tangentialebene von F in $\mathfrak{q}$ in zwei Geraden, welche die Curve c in $\mathfrak{q}$ berühren. Also sind die Puncte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... sämmtlich für c Doppelpuncte.

Auf der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, findet man als Puncte der c' die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ..., und auf $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$ hat dieselbe Curve die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, .., folglich enthält die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels $2(\rho-3)$ Puncte von c'. Einer davon ist $\mathfrak{p}_1$, ein andrer $\mathfrak{p}_2$. Jeder dieser Puncte ist für c ein

[1]) *Einleitung*, No. 68.

Doppelpunct und ein einfacher Punct für c', und vertritt also zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die $\varkappa$ Sehnen der Curve (ξ), welche durch $\mathfrak{o}$ gehen, geben folglich $4\varkappa$ Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

c. Die Puncte, in denen die Cuspidalcurve (ν) und die θ stationären Generatrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Die Gerade, welche von $\mathfrak{o}$ nach dem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) geht, treffe in $\mathfrak{m}$ die Linie ($\nu+\theta$) und ausserdem F in weiteren $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... Da $\mathfrak{m}$ zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{op}$ mit F darstellt, so ist $\mathfrak{m}$ auch einer der harmonischen Mittelpuncte, deren Ort c' ist. Jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ trifft in diesem Puncte c in zwei zusammenfallenden Puncten, weil $\mathfrak{m}$ ein gewöhnlicher Punct für den Kegel (ξ) und ein Doppelpunct (Uniplanarpunct) für F ist. Da nun alle Geraden, die mit F einen dreipunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ haben, in einer einzigen Ebene liegen, so ist die Durchschnittsgerade dieser Ebene mit derjenigen, welche den Kegel (ξ) längs $\mathfrak{op}$ berührt, die einzige Tangente der Curve c in $\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}$ ist folglich für c eine Spitze. Eine beliebig durch $\mathfrak{op}$ gezogene Ebene schneidet den Kegel (ξ) in anderen $\xi-1$ Generatrixen, deren eine $\mathfrak{op}'$ die Curve c in den Puncten $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$ ... trifft. Nähert sich $\mathfrak{op}'$ unendlich der Geraden $\mathfrak{op}$, das heisst, wird die Ebene Tangentialebene des Kegels, so nähern sich die Puncte $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$, ... unendlich den Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... und die beiden andern $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ nähern sich unendlich dem Puncte $\mathfrak{m}$ und also auch sich selbst untereinander. Wenn sich aber die Puncte $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ in einen vereinigen, so fällt auch einer der harmonischen Mittelpuncte auf $\mathfrak{op}'$ mit ihm zusammen, das heisst, die beiden Curven c, c' haben in $\mathfrak{m}$ dieselbe Tangente $\mathfrak{mm}'$ oder $\mathfrak{mm}''$. Folglich repräsentiert $\mathfrak{m}$ drei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die Zahl der zu $\mathfrak{m}$ analogen Puncte χ ist gleich der Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte (107) der Curve (ξ) mit der Linie ($\nu+\theta$). Die Curven (ξ) und (ν) haben gemein:

1. die Berührungspuncte der α stationären Ebenen;
2. die β Cuspidalpuncte der Curve (ν); jeder derselben zählt für drei Durchschnittspuncte der beiden Curven, weil diese in ihm dieselbe Tangente haben (103);
3. die λ Cuspidalpuncte der Curve (ξ); jeder von ihnen zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven nicht dieselbe Tangente haben;
4. die θ Berührungspuncte der stationären Tangenten; jeder derselben zählt für drei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven drei Puncte in gerader Linie gemein haben;
5. Die 2ω Berührungspuncte der Doppeltangenten; jeder derselben zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven (ν) und (ξ) dieselben Tangenten haben;
6. Die ϑ' Doppelpuncte der Curve (ν), welche, als vierfache Puncte der Curve (ξ), $2.4.\vartheta'$ Durchschnittspuncten gleich gelten.

Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curven (ξ), (ν) ist daher

$$\nu\xi - \alpha - 3\beta - 2\lambda - 3\theta - 4\omega - 8\vartheta'.$$

Jede der θ stationären Geraden hat (100) mit der Curve (ξ) einen dreipunctigen Contact und ausserdem $\rho-6$ gemeinschaftliche Puncte, von denen jeder für die Curve (ξ) stationär ist und folglich zwei wirkliche Durchschnittspuncte darstellt. Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der stationären Geraden ist also

$$\xi - 2(\rho-6) - 3,$$

und folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der Linie $(\nu+\theta)$ gleich

$$\nu\xi - \alpha - 3\beta - 2\lambda - 3\theta - 4\omega - 8\vartheta' + \theta(\xi - 2\rho + 9).$$

d. Die Puncte, in denen die ω Doppelgeneratrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Wenn die von $\mathfrak{o}$ nach einem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) gezogene Gerade die Doppelgeneratrix t in $\mathfrak{m}$ trifft, so gilt $\mathfrak{m}$ für zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{op}$ mit F und ist daher ein Punct der Curve c', des Ortes der harmonischen Mittelpuncte. Ferner ist $\mathfrak{m}$ für die Curve c ein Doppelpunct, weil diese in ihm zwei Tangenten besitzt, welche die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{op}$ mit den Tangentialebenen von F längs t sind. Die Gerade t hat mit der Curve (ξ) zwei dreipunctige Berührungen und ausserdem noch $\rho-8$ gemeinsame Puncte, die für genannte Curve Doppelpuncte sind; folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte dieser Curve mit den ω Doppelgeneratrixen gleich $\omega[\xi-2(\rho-8)-2.3]$ das heisst $\omega(\xi-2\rho+10)$. Jeder dieser Puncte zählt für zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

e. Die Doppelpuncte der Curve (ν), welche für die Curve (ξ) vierfach sind. Ist $\mathfrak{m}$ einer dieser Puncte, so ist $\mathfrak{om}$ eine vierfache Generatrix des Kegels (ξ). Wir wollen diese Gerade so ansehen, als sei sie durch Uebereinanderlagern von vier verschiedenen Generatrixen erzeugt: in jeder derselben fallen zwei von den $\rho-6$ Puncten der Curve c mit $\mathfrak{m}$ zusammen, folglich ist $\mathfrak{m}$ auch ein harmonischer Mittelpunct, das heisst ein Punct von c'. Der Punct $\mathfrak{m}$ repräsentiert für die Curve c und auf jeder der vier Generatrixen einen Doppelpunct mit zusammenfallenden Tangenten, weil die Tangenten die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{om}$ mit den Tangentialebenen der Developpablen in $\mathfrak{m}$ sein würden, und diese Geraden zusammenfallen, da diese drei Ebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen. (In der That ist die einzige Tangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{m}$ genau der Durchschnitt der beiden Tangentialebenen von F). Also gilt $\mathfrak{m}$ für 3.4 Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

111. Die Durchschnittspuncte der Curven c, c' sind also durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\xi(\rho-2)(\rho-3)=\mu(\xi-2\rho+8)+4\varkappa+3(\nu\xi-\alpha-3\beta-2\lambda-3\theta-4\omega-8\vartheta')$$
$$+3\theta(\xi-2\rho+9)+2\omega(\xi-2\rho+10)+12\vartheta'.$$

Aus der dritten Gleichung der Nr. 97 erhält man aber:

$$\rho(\rho-1)-\mu-3(\nu+\theta)-2\omega=2\xi,$$

also:

$$2\xi(\xi-2\rho+3)=-2\mu(\rho-4)+4\varkappa-3(\alpha+3\beta+2\lambda)-6\theta(\rho-3)-4\omega(\rho-2)-12\vartheta'.$$

Addiert man diese Gleichung zu der mit 4 multiplicierten ersten Gleichung in Nr. 109, und setzt für β den äquivalenten Ausdruck (97):

$$6\rho-8\mu+3\alpha-2\theta,$$

so erhält man:

$$\xi(\xi-1)-2\varkappa-2\omega(\rho-8)-3\lambda-3\theta(\rho-6)-6\tau-18\vartheta'=\rho(\mu-3)-3a.$$

112. Daraus ergibt sich sogleich die Classe der Curve (ξ). Diese Curve hat $\varkappa$ scheinbare Doppelpuncte, $\omega(\rho-8)$ wirkliche Doppelpuncte, $\lambda+\theta(\rho-6)$ stationäre Puncte, τ dreifache und ϑ' vierfache Puncte, von denen jeder sechs Doppelpuncten und zwei Spitzen gleich gilt (106, *Anmerkung*). Ausserdem hat die Curve (ξ) noch weitere γ' Doppelpuncte entsprechend den Ebenen, welche F längs zwei verschiedener Generatrixen berühren.

Betrachten wir nähmlich eine solche Ebene, welche die Curve (ν) in zwei Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ osculiert und F längs der beiden Geraden $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ berührt. Diese Ebene schneidet F längs einer Curve l der $(\rho-4)$-ten Ordnung und $(\mu-2)$-ter Classe, mit $\nu+\theta-6$ Spitzen also im Besitz von

$$\tfrac{1}{2}[\rho-4)(\rho-5)-(\mu-2)-3(\nu+\theta-6)]=\xi+\omega-4(\rho-5)$$

Doppelpuncten. Der Punct $\mathfrak{n}$ ist für den vollständigen Schnitt vierfach und stellt also vier Durchschnittspuncte der Ebene $\mathfrak{mm'n}$ mit der Knotencurve dar, und folglich fallen die übrigen $4(\rho-6)$ Durchschnittspuncte zu zwei und zwei auf die Durchschnittspuncte von l mit der Geraden $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{m'n}$; das heisst, jede von diesen Geraden berührt l in einem Puncte ($\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}'$) und schneidet sie noch in andern $\rho-6$ Puncten. Die Ebene $\mathfrak{mm'n}$ hat also mit der Knotencurve in $\mathfrak{n}$ eine vierpunctige Berührung und noch $2(\rho-6)$ andere zweipunctige Contacte, und jede der Geraden $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ trifft nicht mehr als $\rho-6$ andere Generatrixen. Schneiden wir also die Curve (ξ) durch eine Ebene, die durch $\mathfrak{nm}$ geht oder auch durch $\mathfrak{nm}'$, so gilt $\mathfrak{n}$ immer für zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte; das heisst $\mathfrak{n}$ ist ein Doppelpunct für die Curve (ξ). Man sieht nun leicht, dass die beiden Tangenten dieser Curve in $\mathfrak{n}$ in der Ebene $\mathfrak{mm'n}$ enthalten sind und mit den beiden Generatrixen $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ ein harmonisches Büschel bilden [1]).

---

1) Die correlative Eigenschaft ist: Wenn die Curve (ν) einen Doppelpunct $\mathfrak{m}$ hat, so berührt die Ebene der beiden Tangenten die doppeltberührende Developpable (die von der Classe η ist) längs zwei Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, und den beiden Tangenten der Cuspidalcurve harmonisch conjugiert sind. Diese beiden Geraden sind die Spuren der Ebenen, welche in $\mathfrak{m}$ mit der Knotencurve einen siebenpunctigen Contact haben.

Dies vorausgesetzt, ist mit Rücksicht auf die letzte Gleichung der Nr. 111 die Classe der Knotencurve, das heisst die Ordnung der Developpablen, welche von ihren Tangenten erzeugt wird, gleich

$$\rho(\mu-3)-3\alpha-2\gamma'.$$

Gemäss dem Dualitätsprincip ist dann die Ordnung der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν) gleich

$$\rho(\nu-3)-3\beta-2\vartheta'.$$

CAPITEL V.

PROJECTIVISCHE FLÄCHENBÜSCHEL.

113. Es sind zwei projectivische Flächenbüschel bezüglich ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung gegeben; was ist der Ort der Durchschnittscurve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung zweier entsprechender Flächen?

Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct einer Geraden t, so geht durch $\mathfrak{x}$ eine Fläche des ersten Büschels. Die entsprechende Fläche des zweiten Büschels schneidet t in ν_2 Puncten $\mathfrak{x}'$. Umgekehrt geht durch einen Punct $\mathfrak{x}'$ eine Fläche des zweiten Büschels, und die entsprechende Fläche des ersten Büschels schneidet t in ν_1 Puncten $\mathfrak{x}$. Wir haben daher auf t zwei Reihen von Puncten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ mit der Beziehung (ν_1, ν_2) und die Zahl der zusammenfallenden Puncte ist daher $\nu_1 + \nu_2$. *Der gesuchte Ort ist also eine Fläche* $\nu_1 + \nu_2$)*-ter Ordnung.*

Oder auch: Eine beliebige Ebene schneidet die gegebenen Flächen in Curven, die zwei projectivische Büschel bilden. Nun ist der Ort der Durchschnittspuncte entsprechender Curven eine Curve ($\nu_1 + \nu_2$)-ter Ordnung[1]), also wird der gesuchte Ort von jeder beliebigen Ebene in einer Curve ($\nu_1 + \nu_2$)-ter Ordnung geschnitten.

Diese Fläche geht durch die Curven $\nu_1{}^2$-ter, $\nu_2{}^2$-ter Ordnung, welche die Basen der beiden Büschel bilden, weil jeder Punct dieser Curven in allen Flächen des einen Büschels und in einer Fläche des andern liegt.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Punct der Curve ($\nu_1{}^2$), S_2 diejenige Fläche des zweiten Büschels, die durch $\mathfrak{o}$ geht, S_1 die entsprechende Fläche des ersten Büschels und P die Ebene, welche S_1 in $\mathfrak{o}$ berührt. Dann schneidet P die S_1 in einer Curve, welche in $\mathfrak{o}$ einen Doppelpunct hat, und S_2 in einer Curve, die

---

1) GRASSMANN, *Die höhere Projectivität in der Ebene.* (Crelles Journal, Bd. 42; 1851. S. 202). — *Einleitung,* No. 50.

durch σ geht. Folglich[1]) ist σ auch für die Curve $(\nu_1 + \nu_2)$, der Durchschnittscurve der Fläche $(\nu_1 + \nu_2)$ mit der Ebene P, ein Doppelpunct, das heisst, diese Fläche wird in σ von der Ebene P berührt.

114. Auf einer Fläche **S** der $(\nu_1 + \nu_2)$-ten Ordnung denken wir uns eine Curve c_1 der $\nu_1{}^2$-ten Ordnung gezogen, welche die Basis eines Flächenbüschels ν_1-ter Ordnung bildet, und nehmen zunächst an, es sei $\nu_1 > \nu_2$. Es seien S_1, S_1' zwei Flächen dieses Büschels. Da die Flächen S_1, **S** die Curve c_1 gemein haben, die auf einer Fläche S_1' der ν_1-ten Ordnung liegt, so schneiden sie sich ausserdem noch in einer Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, die auf einer Fläche S_2 der ν_2-ten Ordnung liegt[2]), die nur eine sein kann, weil zwei Flächen ν_2-ter Ordnung keine Curve gemein haben können, deren Ordnungszahl $\nu_1\nu_2 > \nu_2{}^2$ ist. Ebenso schneiden sich die Flächen S_1', **S**, da sie beide durch die Curve c_1 gehen, die auf einer Fläche S_1 der ν_1-ten Ordnung liegt, ausserdem längs einer Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, die auf einer völlig bestimmten Fläche S_2' der ν_2-ten Ordnung liegt. Die Puncte, in denen die gemeinschaftliche Curve c_2 der Flächen S_2, S_2' die Flächen S_1, S_1' trifft, gehören bezüglich zu den Curven S_1S_2, $S_1'S_2'$; das heisst, sie liegen sämmtlich auf der Fläche **S**. Ihre Zahl $2\nu_1\nu_2{}^2$ übersteigt aber die Zahl $(\nu_1 + \nu_2)\nu_2{}^2$ der Durchschnittspuncte einer Curve $\nu_2{}^2$-ter Ordnung mit einer Fläche der $(\nu_1 + \nu_2)$-ten Ordnung, und es liegt daher die Curve S_2S_2' vollständig auf **S** und bildet dort die Basis eines Büschels ν_2-ter Ordnung. Wir haben somit auf **S** zwei Curven c_1, c_2, welche die Basiscurven zweier Büschel $(S_1, S_1', \ldots)$, $(S_2, S_2', \ldots)$ der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung bilden. Jede Fläche des ersten Büschels schneidet **S** längs einer Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, durch welche eine ganz bestimmte Fläche des zweiten Büschels geht, und umgekehrt, die zweite Fläche individualisiert die erste. Die beiden Büschel sind daher projectivisch und der Ort der Durchschnittscurven entsprechender Flächen ist **S**.

Es sei zweitens $\nu_1 \overline{\overline{<}} \nu_2$. Eine beliebige Fläche S_1 der Ordnung ν_1 welche durch die Curve c_1 geht, schneidet **S** längs einer andern Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, durch welche (20, *Anmerkung*) eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν_2-ter Ordnung geht. Es sei S_2 eine derselben, welche dadurch bestimmt ist, dass auf der Fläche **S** ausserhalb der Curve c_1 noch $\mathfrak{N}(\nu_2 - \nu_1) + 1$ beliebige Puncte fixiert sind. Dann schneidet S_2 die **S** in einer andern Curve c_2 der $\nu_2{}^2$-ten Ordnung, welche die Basis eines Büschels ν_2-ter Ordnung bildet[3]). Eine andere Fläche S_1 der ν_1-ten Ordnung, die auch durch c_1 geht, schneidet **S** in einer andern Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ord-

---

[1]) *Einleitung*, No. 51, b.

[2]) Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folge der analogen Eigenschaft, welche (*Einleitung*, 44) für die Curven besteht, die bei Durchschneiden der Flächen in Rede durch eine Ebene entstehen.

[3]) Man sehe die Bemerkung der letzten *Note*.

nung, welche $\nu_1\nu_2^2$ Puncte mit c_2 gemein hat, nämlich die Puncte, in denen c_2 von S_1 getroffen wird; folglich enthält die Fläche S_2' der ν_2-ten Ordnung, die durch c_2 und einen neuen beliebig auf der letzten Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung angenommenen Punct geht, diese letztere Curve vollständig. Auf diese Weise haben wir wie im ersten Falle auf **S** zwei Curven c_1, c_2, welche die Basiscurven zweier projectivischer Büschel bilden, deren entsprechende Flächen sich in Curven schneiden, die sämmtlich auf **S** liegen[1]).

115. Es seien wieder zwei projectivische Flächenbüschel gegeben, das erste von der Ordnung ν', das zweite von der Ordnung $\nu-\nu''<\nu'$. In ihnen mögen die Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}+S_{\nu'-\nu''}$ des ersten Büschels — $S_{\nu''}+S_{\nu'-\nu''}$ ist hierbei der Complex der beiden Flächen $S_{\nu''}$, $S_{\nu'-\nu''}$ — respective den Flächen $S_{\nu-\nu''}$, $S_{\nu-\nu'}+S_{\nu'-\nu''}$ des zweiten Büschels entsprechen. Als Ort der gemeinschaftlichen Durchschnittscurven der entsprechenden Flächen erhält man dann den Complex der Fläche $S_{\nu'-\nu''}$ und einer zweiten Fläche S_ν der ν-ten Ordnung und kann damit das vorhergehende Theorem auf folgende Weise darstellen:

Man habe die drei Flächen S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$, deren erste durch die Durchschnittscurve $\nu'\nu''$-ter Ordnung der beiden andern Flächen geht, und es sei $\nu \gtreqless \nu'$, $\nu<\nu'+\nu''$ und $\nu' \gtreqless \nu''$. Die Fläche $S_{\nu'}$ schneidet S_ν längs einer anderen Curve der $\nu'(\nu-\nu'')$-ten Ordnung, die auf einer Fläche $S_{\nu-\nu''}$ liegt, welche vollständig und eindeutig bestimmt ist, weil $\nu-\nu''<\nu'$ ist. Eenso haben $S_{\nu''}$ und S_ν eine andere Curve der $\nu''(\nu-\nu')$-ten Ordnung gemein, die auf einer Fläche $S_{\nu-\nu'}$ liegt, die gleichfalls eindeutig bestimmt ist, da $\nu-\nu'<\nu''$ ist. Nun schneiden sich $S_{\nu-\nu'}$ und $S_{\nu-\nu''}$ längs einer Curve, die auf S_ν liegt gemäss dem allgemeinen Theorem (114). Auf diese Weise sind also, wenn S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben sind, die Flächen $S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu-\nu''}$ vollständig und nur auf eine Weise individualisiert, und S_ν gehört zu demselben Büschel, zu welchem die zusammengesetzten Flächen $S_{\nu'}+S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu''}+S_{\nu-\nu''}$ gehören. Sind also jetzt nur die Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben, so kann S_ν, da $S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu-\nu''}$ genau

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')$$

Bedingungen genügen können, und man, um eine Fläche eines Büschels festzulegen, einer neuen Bedingung genügen muss,

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+1$$

Bedingungen erfüllen. Man hat daher den Satz:

Soll S_ν durch die Curve $S_{\nu'}S_{\nu''}$ hindurchgehen, so gilt das gleich, als sollte sie durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')-1$$

beliebig gegebene Puncte gehen.

Oder auch:

---

1) Chasles, *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres.* (Compte rendu du 28 décembre 1857).

Jede Fläche ν-ter Ordnung, welche durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'') - 1$$

beliebige Puncte der Durchschnittscurve zweier Flächen ν'-ter und ν''-ter Ordnung ($\nu < \nu' + \nu''$) geht, enthält diese Curve vollständig.

Eine Fläche ν-ter Ordnung, die durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'') - 2$$

beliebige Puncte der Curve ($\nu'\nu''$) geht, schneidet sie noch in

$$\nu\nu'\nu'' - \mathfrak{N}(\nu) + \mathfrak{N}(\nu-\nu') + \mathfrak{N}(\nu-\nu'') + 2$$

weiteren Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sein müssen, da sie nicht beliebig sein können, ohne dass die Fläche die Curve vollständig enthielte. Alle Flächen also, welche durch die ersten Puncte gehen, enthalten auch die anderen. Man hat daher den Satz:

Die $\nu\nu'\nu''$ Durchschnittspuncte dreier Flächen von den respectiven Ordnungen ν, ν', ν'' sind durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'') - 2$$

von ihnen bestimmt, vorausgesetzt, dass die grösste der Zahlen ν, ν', ν'' kleiner ist als die Summe der beiden andern.

116. Es sei jetzt die zusammengesetzte Fläche $S_\nu + S_{\nu'-\nu''}$ mittelst zwei projectivischer Flächenbüschel erzeugt, in denen den Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''} + S_{\nu'-\nu''}$ des ersten Büschels die Flächen $S_{\nu-\nu''}$, $S_{\nu-\nu'} + S_{\nu'-\nu''}$ des zweiten der Reihe nach entsprechen, aber es sei jetzt $\nu \geqq \nu' + \nu''$, $\nu' \geqq \nu''$.

Es seien die Flächen S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben. Die Fläche $S_{\nu'}$ schneidet S_ν in einer Curve der $\nu'(\nu-\nu'')$-ten Ordnung durch welche zusammen mit $\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') + 1$ weiteren Puncten, die wir auf S_ν nehmen, eine Fläche $S_{\nu-\nu''}$ der $(\nu-\nu'')$-ten Ordnung geht (114). Ebenso schneidet $S_{\nu''}$ die S_ν in einer Curve $\nu''(\nu-\nu')$-ter Ordnung, durch welche im Verein mit den obigen weiteren Puncten eine Fläche $S_{\nu-\nu'}$ der $(\nu-\nu')$-ten Ordnung geht. Die beiden Flächen $S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu-\nu''}$ schneiden sich auf S_ν, welche folglich zusammen mit $S_{\nu'} + S_{\nu-\nu'}$ und $S_{\nu''} + S_{\nu-\nu''}$ demselben Büschel angehört. Sind ausser der Curve $S_{\nu'}S_{\nu''}$ auch die weiteren Puncte im Raume gegeben, aber S_ν nicht gegeben, so kann die Fläche $S_{\nu-\nu'}$, die durch diese Puncte gehen muss, noch andern

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') - 1$$

Bedingungen genügen, und ebenso $S_{\nu-\nu''}$ noch andern

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu'') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') - 1$$

Bedingungen. Also kann S_ν auch

$$[\mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') - 1] + [\mathfrak{N}(\nu-\nu'') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') - 1] + 1$$

Bedingungen Genüge leisten. Es folgt also, dass für S_ν die Bedingung, durch die Curve $S_{\nu'}S_{\nu''}$ und die weiteren Puncte zu gehen, so viel gilt als

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu-\nu') - \mathfrak{N}(\nu-\nu'') + 2\,\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'') + 1$$

Bedingungen. Das Enthalten der Curve $S_{\nu'}S_{\nu''}$ entspricht folglich

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')=\tfrac{1}{2}\nu'\nu''(2\nu-\nu'-\nu''+4)$$

Bedingungen.

Geht also unter der jetzigen Voraussetzung eine Fläche ν-ter Ordnung durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')$$

beliebige Puncte der Durchschnittscurve zweier Flächen ν'-ter, ν''-ter Ordnung, so enthält sie dieselbe vollständig,

und man hat folglich den Satz:

Jede Fläche ν-ter Ordnung, welche durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')-1$$

beliebige Puncte der Curve $(\nu'\nu'')$ geht, trifft dieselbe noch in andern

$$\nu\nu'\nu''-\mathfrak{N}(\nu)+\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')+1=\frac{\nu'\nu''(\nu'+\nu''-4)}{1.2}+1$$

Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sind.

Oder auch:

Die $\nu\nu'\nu''$ Durchschnittspuncte dreier Flächen bezüglich von den Ordnungen ν, ν', ν'' sind durch $\frac{\nu'\nu''(2\nu-\nu'-\nu''+4)}{1\,.\,2}-1$ von ihnen vollständig bestimmt, vorausgesetzt, dass die grösste der Zahlen ν, ν', ν'' nicht kleiner ist als die Summe der beiden andern [1]).

117. Gegeben zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung. Was ist der Ort eines Punctes $\mathfrak{x}$, dessen Polarebenen in Bezug auf jene Flächen sich auf einer gegebenen Geraden r schneiden?

Gehen durch einen Punct $\mathfrak{i}$ von r die Polarebenen von $\mathfrak{x}$, so schneiden sich umgekehrt die ersten Polarflächen von $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{x}$ (62). Lässt man $\mathfrak{i}$ sich auf r bewegen, so bilden die ersten Polarflächen zwei projectivische Büschel (86) bezüglich von der (ν_1-1)-ten, (ν_2-1)-ten Ordnung und diese erzeugen (113) eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, welche der gesuchte Ort ist.

Jeder gemeinschaftliche Punct dieser Fläche und der Duchschnittscurve der beiden gegebenen Flächen hat zu Polarebenen die Tangentialebenen der beiden Flächen in diesem Puncte und folglich ist die Durchschnittsgerade dieser beiden Ebenen die Tangente der Curve $(\nu_1\nu_2)$ im nämlichen Puncte. Diese Durchschnittsgerade trifft aber die Gerade r, und es gibt also so viele Durchschnittspuncte der Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$-ter Ordnung mit der Curve $(\nu_1\nu_2)$ als es Tangenten von $(\nu_1\nu_2)$ gibt, die von r getroffen werden. Nehmen wir jetzt an, die Curve $(\nu_1\nu_2)$ hätte δ Doppelpuncte und σ Spitzen, das heisst, die beiden gegebenen Flächen hätten in δ Puncten eine einfache und in σ Puncten eine stationäre Berührung, so gehören diese Puncte offenbar auch der Fläche

1) Jacobi, *a. a. O.*

$(\nu_1+\nu_2-2)$ an, und die Zahl der überbleibenden Durchschnittspuncte ist

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma\ldots$$ [1].

Man hat also:

Die Tangenten der Durchschnittscurve zweier Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung, die δ einfache und σ stationäre Berührungen haben, bilden eine Developpable von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma.$$

Auf diese Weise kennen wir von der Curve $(\nu_1\nu_2)$ die Ordnung $\nu=\nu_1\nu_2$, die Ordnung der osculierenden Developpablen $\rho=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma$ und die Zahl der stationären Puncte $\beta=\sigma$. Die Formeln von Cayley (12, 79) geben nun die übrigen Charakteristiken:

$$2\vartheta=\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1),$$

$$\mu=3\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)-6\delta-8\sigma,$$

$$\alpha=2\nu_1\nu_2(3\nu_1+3\nu_2-10)-3(4\delta+5\sigma),$$

$$2\gamma=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)\left\{9\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)-6(6\delta+8\sigma)-22\right\}+5\nu_1\nu_2+(6\delta+8\sigma)(6\delta+8\sigma+7),$$

$$2\xi=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2(2\delta+3\sigma)-4\right\}+(2\delta+3\sigma)^2+8\delta+11\sigma,$$

$$2\eta=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2(2\delta+3\sigma)-10\right\}+8\nu_1\nu_2+(5\delta+3\sigma)^2+20\delta+27\sigma.$$

Hierin ist ϑ die Zahl der scheinbaren Doppelpuncte der Curve, die Zahl der wirklichen Doppelpuncte, welche δ ist, nicht eingerechnet.

Das Geschlecht der Curve ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu_1\nu_2-1)(\nu_1\nu_2-2)-(\vartheta+\delta+\sigma)=\tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-4)-(\delta+\sigma-1)$$

und ist gleich Null, wenn die Curve ihre grösste Zahl von Doppelpuncten hat. Folglich entsteht der Satz:

Die grösste Zahl der Puncte, in denen zwei Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung sich berühren können, ist

$$\tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-4)+1.$$

---

[1]) Die Zahl der überbleibenden Durchschnittspuncte sei

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-\xi\delta-\eta\sigma,$$

wo ξ und η noch zu bestimmende Coefficienten sind. Zu diesem Zwecke setze man $\nu_1=\nu$, $\nu_2=1$, dann wird die Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$ die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{o}$, in dem r eine Ebene P trifft, in Bezug auf eine gegebene Fläche F_ν. Die Tangenten der Curve PF_ν, welche durch r getroffen werden, sind diejenigen, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen, also muss die Zahl

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-\xi\delta-\eta\sigma$$

die Classe der Curve PF_ν ausdrücken. Diese ist aber gleich $\nu(\nu-1)-2\delta-3\sigma$ und folglich ist $\xi=2$ und $\eta=3$.

118. Die Zahl s der Geraden, die durch einen festen Punct $\mathfrak{o}$ gehen, und jede die Durchschnittscurve zweier Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} in zwei Puncten treffen, kann man auch direct, wie folgt, bestimmen.

Wie es schon anderswo (77—79) gezeigt ist, bilde man für jede der beiden gegebenen Flächen die Reihe der perspectivischen Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} und die Reihe der abgeleiteten Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$, $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ entsprechend den verschiedenen Werthen eines gewissen Doppelverhältnisses und zwar unter Benutzung des Poles $\mathfrak{o}$ und einer willkürlichen Ebene P. Die so bestimmten vier Reihen von Flächen sind projectivisch, wenn man nur als entsprechende Elemente diejenigen Flächen annimmt, die ein und demselben Werthe des Doppelverhältnisses entsprechen.

Die Ordnung und der Index der Reihen, die durch die Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} gebildet werden, sind ν_1, ν_2, und also ist [1]) der Ort der gemeinschaftlichen Curve zweier entsprechender Flächen dieser Reihen von der $2\nu_1\nu_2$-ten Ordnung. In diesem Orte ist ferner die Ebene P $\nu_1\nu_2$-mal enthalten. Denn die ν_1 Flächen der ersten Reihe und die ν_2 Flächen der zweiten Reihe, welche durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{p}$ von P gehen, fallen mit der Ebene P zusammen, weil alle Flächen jeder Reihe durch ein und dieselbe Curve, die in der Ebene P liegt, gehen. Der Punct $\mathfrak{p}$ gehört daher ν_1 Flächen der ersten und ν_2 Flächen der zweiten Reihe an, und jede beliebige der letzten kann als jeder beliebigen der ersten entsprechend angenommen werden; also ist auch $\mathfrak{p}$ ein $(\nu_1\nu_2)$-facher Punct für den durch diese beiden Reihen erzeugten Ort.

Dieser Ort ist, von der Ebene P abgesehen, aus einer Fläche $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gebildet, die nichts Anderes ist, als der Kegel K, dessen Scheitel in $\mathfrak{o}$ liegt, und dessen Directrix die Curve $(\nu_1\nu_2)$ ist, welche beiden Flächen gemein ist; denn dieser Kegel geht durch die gemeinsame Curve irgend zwei entsprechender Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2}.

In ähnlicher Weise erzeugen die beiden Reihen der $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$, $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ eine Fläche $\mathbf{S}$ von der Ordnung $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$. Nun gehört jeder den Flächen F_{ν_1} und $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden Fläche F'_{ν_1} an, und ebenso jeder den Flächen F_{ν_2} und $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden F'_{ν_2}, und so muss also jeder Punct $\mathfrak{a}'$, der auf dem Orte $\mathbf{S}$ liegt — und daher in zwei entsprechenden Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$, $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ — und in der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$, auch in zwei entsprechenden Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2}, liegen. Der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$ enthält folglich ausserdem noch einen Punct $\mathfrak{a}$, der F_{ν_1} und F_{ν_2} gemein ist, das heisst, dieser Strahl trifft die Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ in zwei *getrennten* Puncten. Ich sage getrennt, weil zwei homologe Puncte der Flächen F_{ν}, F'_{ν} nur zusammenfallen, wenn sie in der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_{ν} liegen; die beiden Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ fallen daher nur dann zusammen, wenn F_{ν_1}, F_{ν_2} mit ihrer ersten Polarfläche einen gemeinsamen Punct

1) *Einleitung*, Nr. 83.

haben, oder auch — wegen der Willkürlichkeit des Poles σ — wenn F_{ν_1} und F_{ν_2} einen vielfachen Punct gemein haben.

Halten wir also fest, dass σ ein ganz beliebig gegebener Punct ist, und das F_{ν_1}, F_{ν_2} keine gemeinschaftlichen vielfachen Puncte besitzen, wenn sie auch Berührungspuncte haben, so sind die $\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Durchschnittspuncte von $\mathbf{S}$ mit der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ zu zwei und zwei mit dem Pole σ in gerader Linie, das heisst, durch σ gehen

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$$

Sehnen der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$.

119. Wenn die Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{a}$ haben, der bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist, so ist im Allgemeinen $\mathfrak{a}$ für die gemeinschaftliche Durchschnittscurve beider Flächen $\pi_1\pi_2$-fach. Da nun der Strahl $\sigma\mathfrak{a}$ die Fläche F_{ν_1} anderswo nur noch in $\nu_1-\pi_1$ und F_{ν_2} nur noch in $\nu_2-\pi_2$ Puncten trifft, so werden in $\mathfrak{a}$

$$(\nu_1-1)-(\nu_1-\pi_1) = \pi_1-1$$

Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ mit der ersten Polarfläche von σ in Bezug auf F_{ν_1} zusammenfallen und ebenso

$$(\nu_2-1)-(\nu_2-\pi_2) = \pi_2-1$$

Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ mit der ersten Polarfläche von σ in Bezug auf F_{ν_2}.

Eine beliebige von diesen π_1-1 Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ kann man als correspondierende Fläche für jede beliebige der π_2-1 Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ ansehen, und folglich ist $\mathfrak{a}$ für $\mathbf{S}$ ein $(\pi_1-1)(\pi_2-1)$-facher Punct und stellt in Folge dessen $\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)$ Durchschnittspuncte von $\mathbf{S}$ und der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ dar. Die Zahl der Sehnen dieser Curve, welche durch σ gehen ist also

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)\right\}$$

Unter derselben Voraussetzung, wie wir sie oben gemacht haben, ist der Punct $\mathfrak{a}$ für alle ersten Polarflächen in Bezug auf F_{ν_1}, F_{ν_2} bezüglich (π_1-1)-fach und (π_2-1)-fach (92) und ist also für die Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$-ter Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebene für die gegebenen Flächen sich auf einer festen Geraden schneiden (107), ein $(\pi_1+\pi_2-2)$-facher Punct. Die Tangenten der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ bilden also in diesem Falle eine Developpable von der Ordnung

$$\rho = \nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma-\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2-2).$$

120. Wir setzen jetzt voraus, dass die beiden Flächen (ν_1), (ν_2) sich in zwei Curven schneiden, deren Ordnungszahlen φ, φ' $(\varphi+\varphi'=\nu_1\nu_2)$, und deren Classen ρ, ρ' sind. Wir bezeichnen durch $\vartheta, \delta;\ \vartheta', \delta'$ die Zahl ihrer scheinbaren und wirklichen Doppelpuncte; durch σ, σ' die Zahl ihrer stationären Puncte, und durch $\varkappa$ die Zahl ihrer scheinbaren Durchschnittspuncte, das heisst die Zahl der Geraden, die man durch einen beliebigen Punct des Raumes so ziehen kann, dass sie beide Curven schneiden. Nun haben wir (117, 12):

$$\begin{cases}(\varphi+\varphi')(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2(\vartheta+\vartheta'+\varkappa),\\ \rho=\varphi(\varphi-1)-2(\vartheta+\delta)-3\sigma\\ \rho'=\varphi'(\varphi'-1)-2(\vartheta'+\delta')-3\sigma'\end{cases}$$

und hieraus

$$\rho-\rho'=(\varphi-\varphi')(\nu_1\nu_2-1)-2(\vartheta-\vartheta')-2(\delta-\delta')-3(\sigma-\sigma').$$

Wir bemerken ferner, dass die Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, der Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die beiden gegebenen Flächen sich auf einer gegebenen Geraden r treffen (117), die Curve (φ) nicht nur in den Puncten schneidet, in denen dieselbe von Geraden berührt wird, die durch r geschnitten werden, sondern auch in den Puncten, in denen die Curve (φ) von der Curve (φ') geschnitten wird, da jeder solcher Punct ein Berührungspunct beider Flächen ist. Wenn also ι die Zahl der wirklichen Durchschnittspuncte der beiden Curven (φ), (φ') ist, so haben wir:

$$(\nu_1+\nu_2-2)\varphi=\rho+\iota+2\delta+3\sigma,$$

und analog

$$(\nu_1+\nu_2-2)\varphi'=\rho'+\iota+2\delta'+3\sigma'.$$

Folglich auch

$$(\nu_1+\nu_2-2)(\varphi-\varphi')=(\rho-\rho')+2(\delta-\delta')+3(\sigma-\sigma')$$

Aus dieser Gleichung und einer vorhergehenden erhält man nun:

$$(\varphi-\varphi')(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2(\vartheta-\vartheta')$$

und hieraus

$$\begin{cases}\varphi(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2\vartheta+\varkappa,\\ \varphi'(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2\vartheta'+\varkappa.\end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man ϑ' und $\varkappa$, wenn ϑ gegeben ist, und, wenn ρ bekannt ist, ρ' und ι, wo man entweder die Zahlen δ, σ, δ', σ', gleich Null setzen muss oder als bekannt betrachten. Eins der gefundenen Resultate lässt sich folgendermassen aussprechen:

Schneiden sich zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung auf einer Curve φ-ter Ordnung, deren Tangenten eine Developpable ρ-ter Ordnung bilden, so haben die gegebenen Flächen noch eine andre Curve von der Ordnung $\varphi'=\nu_1\nu_2-\varphi$ gemein, welche die erste in

$$\iota=(\nu_1+\nu_2-2)\varphi-\rho$$

Puncten schneidet, und die Rückkehrcurve einer Developpablen von der Ordnung

$$\rho'=(\nu_1+\nu_2-2)(\varphi-\varphi')+\rho$$

ist [1]).

121. Wir wollen voraussetzen, durch die Curve (φ) ginge eine dritte Fläche (ν_3). Diese trifft die Curve (φ') nicht blos in den obengenannten ι Puncten, sondern noch in andern

$$\nu_3\varphi'-\iota=\nu_1\nu_2\nu_3-\varphi(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\rho$$

Puncten, die nicht auf der Curve φ liegen; folglich hat man den Satz:

1) Salmon, *Geometry of three dimensions*, p. 274.

Wenn drei Flächen ν_1-ter, ν_2-ter, ν_3-ter Ordnung eine Curve φ-ter Ordnung gemein haben, deren Tangenten eine Developpable ρ-ter Ordnung bilden, so schneiden sie sich in

$$\nu_1\nu_2\nu_3-\varphi(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\rho$$

Puncten, die nicht auf dieser Curve liegen [1]).

Haben die beiden Flächen (ν_1), (ν_2) einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{a}$, der für die Flächen bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist und ψ-fach, ψ'-fach für die Curven (φ), (φ'), so dass also $\psi+\psi'=\pi_1\pi_2$ ist, so erhalten wir an Stelle der obigen Gleichungen (120) folgende anderen:

$$\begin{aligned}
&\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2(\vartheta+\vartheta'+\varkappa),\\
&\rho=\varphi(\varphi-1)-2(\vartheta+\delta)-3\sigma-\psi(\psi-1),\\
&\rho'=\varphi'(\varphi'-1)-2(\vartheta'+\delta')-3\sigma'-\psi'(\psi'-1),\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi=\rho+\iota+2\delta+3\sigma+(\pi_1+\pi_2-2)\psi,\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi'=\rho'+\iota+2\delta'+3\sigma'+(\pi_1+\pi_2-2)\psi',\\
&\varphi(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2\vartheta+\varkappa,\\
&\varphi'(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi'(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2\vartheta'+\varkappa,
\end{aligned}$$

Es hat keine Schwierigkeit die analogen Gleichungen für den Fall aufzustellen, dass die beiden Flächen sich längs drei getrennter Curven schneiden; u. s. w.

122. Es seien drei projectivische Flächenbüschel ν_1-ter, ν_2-ter, ν_3-ter Ordnung gegeben. Die beiden ersten Büschel erzeugen in der Art wie es oben (113) gezeigt ist, eine Fläche $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, und in ähnlicher Weise erzeugen das erste und dritte Büschel eine andere Fläche $(\nu_1+\nu_3)$-ter Ordnung. Beide Flächen gehen durch die Curve ν_1^2-ter Ordnung, welche die Basis des ersten Büschels bildet, sie schneiden sich also ausserdem in einer Curve der Ordnung $(\nu_1+\nu_2)(\nu_1+\nu_3)-\nu_1^2$, und man hat folglich den Satz:

Der Ort der Puncte, in denen sich zwei entsprechende Flächen dreier projectivischer Büschel bezüglich von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 schneiden, ist eine Raumcurve von der $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung.

Diese Curve liegt auf den drei Flächen $(\nu_2+\nu_3)$-ter, $(\nu_3+\nu_1)$-ter, $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, die durch die drei Büschel zu zwei und zwei genommen entstehen. Sie hat ausserdem offenbar die Eigenschaft durch die $\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$ Puncte zu gehen, in der die Basis des ersten Büschels die von den beiden andern erzeugte Fläche schneidet; u. s. w.

123. Es sind gegeben ein Flächenbüschel ν-ter Ordnung und auf einer gegebenen Ebene P drei Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nicht in gerader Linie. Ist $\mathfrak{m}$ ein

---

[1]) Man könnte die allgemeine Frage behandeln: In wieviel Puncten schneiden sich drei Flächen (ν_1), (ν_2), (ν_3), welche eine Curve (φ, ρ) gemein haben, die für die drei Flächen der Reihe nach δ_1-fach, δ_2-fach, δ_3-fach ist?

gemeinschaftlicher Punct der ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf irgend eine Fläche des Büschels, so ist $\mathfrak{m}$ ein Pol der Ebene P in Bezug auf diese Fläche (87). Nun bilden die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf die Flächen des Büschels drei neue projectivische Büschel (74) von der Ordnung $\nu-1$, und der Ort eines Punctes $\mathfrak{m}$, durch den drei entspsrechende Flächen dieser drei Büschel gehen ist (122) eine Raumcurve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung. Also gilt der Satz:

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung ist eine Raumcurve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Diese Curve geht offenbar durch die Puncte, in denen die gegebene Ebene Flächen des gegebenen Büschels berührt (4).

124. Man hat vier projectivische Flächenbüschel von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. Die drei ersten Büschel erzeugen (122) eine Curve der $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung, während das erste und vierte Büschel einer Fläche der $(\nu_1+\nu_4)$-ten Ordnung Entstehung geben (113), welche durch die Basiscurve des ersten Büschels geht und folglich $\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$ Durchschnittspuncte mit der Curve hat, welche durch die ersten drei Büschel entsteht. Diese Curve und die vorgenannte Fläche haben also noch

$$(\nu_1+\nu_4)(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$$

andere Puncte gemein. Das liefert den Satz:

Es gibt

$$\nu_2\nu_3\nu_4+\nu_3\nu_4\nu_1+\nu_4\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_2\nu_3$$

Puncte, durch die jedesmal vier entsprechende Flächen von vier projectivischen Büscheln von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 hindurchgehen.

Diese Puncte liegen auf den sechs Flächen, die durch die gegebenen Büschel zu zwei und zwei genommen entstehen und auch auf den vier Raumcurven, welche dieselben Büschel zu drei und drei genommen erzeugen.

125. In einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung existieren wie viel Flächen mit einem Doppelpunct? Man nehme beliebig im Raume vier Puncte an, dann bilden ihre ersten Polarflächen in Bezug auf die Flächen des Büschels (74) vier projectivische Büschel $(\nu-1)$-ter Ordnung. Hat eine der gegebenen Flächen einen Doppelpunct, so gehen durch ihn die ersten Polarflächen jedes beliebigen Poles (73), und die Doppelpuncte der gegebenen Flächen sind also diejenigen Puncte des Raumes, durch welche vier entsprechende Flächen der genannten vier Büschel gehen. Folglich hat man (124) den Satz:

In einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung gibt es $4(\nu-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunct.

Die Polarebenen eines festen Poles in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein dem ersten projectivischen Büschel. Ist aber der Pol ein Doppelpunct einer dieser Flächen, so ist für diese die Polarebene unbe-

stimmt. *Jeder der $4(\nu-1)^3$ Doppelpuncte hat daher dieselbe Polarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels*[1]).

CAPITEL VI.

PROJECTIVISCHE FLÄCHENNETZE.

126. Hat man zwei projectivische Netze ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, so erzeugt ein beliebiges Büschel des ersten Netzes und das entsprechende Büschel des zweiten eine Fläche **P** der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung. Die Flächen **P** bilden ein neues Netz. Es seien nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Puncte des Raumes, dann gehen durch $\mathfrak{a}$ eine unbegrenzte Zahl von Flächen des ersten Netzes, die ein Büschel bilden; die entsprechenden Flächen des zweiten Netzes bilden ein anderes Büschel, unter dessen Flächen sich eine findet, welche durch $\mathfrak{a}$ geht. Durch $\mathfrak{a}$ gehen also zwei entsprechende Flächen P, P' der beiden Netze, desgleichen durch $\mathfrak{b}$ zwei entsprechende Flächen Q, Q' und die Flächen (P, Q), (P', Q') bestimmen zwei projectivische Büschel[2]), welche eine Fläche $\mathbf{P}_3$ erzeugen, die einzige, welche gleichzeitig durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht.

Es sei R, R' ein anderes Paar entsprechender Flächen der beiden Netze, die nicht zu den obigen Büscheln (P, Q), (P', Q') gehören. Die Büschel (P, R), $(P', R',)$ erzeugen dann eine zweite Fläche $\mathbf{P}_2$, und ähnlich die Büschel (Q, R), (Q', R') eine dritte Fläche $\mathbf{P}_1$. Die Flächen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$ haben die Curve PP' der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung gemein, schneiden sich also noch in einer anderen Curve der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2)^2-\nu_1\nu_2=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2.$$

Ein beliebiger Punct dieser letzteren Curve gehört der Fläche $\mathbf{P}_2$ an, und ist folglich auch zwei entsprechenden Flächen T, T' der beiden Büschel (R, P), (R', P') gemein, und da er auch auf der Fläche $\mathbf{P}_3$ liegen muss, gehört er auch zwei entsprechenden Flächen U, U' der Büschel (P, Q), (P', Q') an. Die beiden Büschel (Q, R), (T, U) gehören zu demselben Netze, und haben folglich eine gemeinschaftliche Fläche S, der eine andre Fläche S' entspricht, welche den beiden Büscheln (Q', R'), (T', U') gemein ist. Jeder

---

1) Es ist klar, sobald in zwei gegebenen projectivischen Büscheln einem bestimmten Elemente des einen ein unbestimmtes Element des andern entspricht, dass dann jedem andern Element des ersten Büschels im zweiten Büschel ein festes Element entspricht. Dieses letzte Büschel enthält daher nur ein einziges Element.

2) In dem Sinne, dass die entsprechenden Flächen der beiden Büschel auch entsprechende Flächen der beiden gegebenen Netze sind.

gemeinsame Punct der Flächen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, das heisst der Flächen T, T'; U, U' ist also ein Basispunct der Büschel (T, U), (T', U') und gehört deshalb auch den Flächen S, S' an, also auch $\mathbf{P}_1$. Die Curve der Ordnung $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2$, welche zusammen mit der Curve PP' den Durchschnitt der Flächen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ bildet, liegt daher auch auf $\mathbf{P}_1$ und bildet folglich die Basis des Netzes der Flächen $\mathbf{P}$. Dieses Netz ist durch die Flächen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ bestimmt, die nicht zu demselben Netze gehören, weil die Curve PP' nicht auf $\mathbf{P}_1$ liegt. Wir erhalten so den Satz:

Die Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, welche die Durchschnittscurven entsprechender Flächen zweier projectivischer Flächennetze ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung enthalten, bilden ein neues Netz und gehen sämmtlich durch dieselbe Raumcurve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung.

Zwei Flächen des ersten Netzes schneiden sich in einer Curve ν_1^2-ter Ordnung, welcher im zweiten Netze eine Curve ν_2^2-ter Ordnung entspricht [1]). Zwei solche Curven schneiden sich im Allgemeinen nicht, diejenigen aber, welche sich treffen, bilden durch ihre Durchschnittspuncte die obengenannte Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung. Mit andern Worten, diese Curve ist der Ort der gemeinschaftlichen Puncte der Basiscurven zweier entsprechender Büschel; im Allgemeinen jedoch geht durch einen beliebigen Punct des Raumes nur ein Paar entsprechender Flächen.

127. Man habe drei projectivische Flächennetze von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3; was ist dann der Ort eines Punctes, durch den drei entsprechende Flächen gehen?

Es sei t eine beliebige Transversale, $\mathfrak{i}$ ein beliebiger Punct auf t; dann gehen durch $\mathfrak{i}$ zwei entsprechende Flächen der beiden ersten Netze, die entsprechende Fläche des dritten Netzes aber schneidet t in ν_3 Puncten $\mathfrak{i}'$. Nehmen wir umgekehrt auf t einen Punct $\mathfrak{i}'$, so bilden die Flächen des dritten Netzes, welche durch $\mathfrak{i}'$ gehen, ein Büschel, welchem in den beiden ersten Büscheln zwei projectivische Büschel entsprechen, welche (113) eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung erzeugen, und diese trifft t in $(\nu_1+\nu_2)$ Puncten $\mathfrak{i}$. Man hat somit den Satz:

Der Ort der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte von drei entsprechenden Flächen dreier projectivischer Flächennetze, deren Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 sind, ist eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung.

Diese Fläche geht

1. Durch die ν_1^3 Basispuncte des ersten Netzes und die analogen ν_2^3, ν_3^3 Puncte der beiden andern Netze;

2. Durch eine unbegrenzte Zahl von Raumcurven von der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$, welche (122) durch je drei entsprechende Büschel der drei Netze entstehen;

---

[1]) Indem man zwei Curven *entsprechend* nennt, welche aus dem Durchschnitt zweier entsprechender Flächenpaare entstehen.

3. Durch die Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung, welche durch die beiden ersten Netze erzeugt wird (126), und durch die analogen Curven der $(\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3)$-ten und der $(\nu_3^2+\nu_1^2+\nu_3\nu_1)$-ten Ordnung.

128. Was ist der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung? Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Puncte der gegebenen Ebene nicht in gerader Linie (123), so bilden die ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei projectivische Netze der $(\nu-1)$-ten Ordnung und folglich hat man den Satz (127):

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Fläche $3(\nu-1)$-ten Ordnung.

Diese Fläche enthält eine unbegrenzte Zahl Raumcurven $3(\nu-1)^2$-ter Ordnung, von denen jede der Ort der Pole der gegebenen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ist, das in dem gegebenen Netze enthalten ist.

Jeder Punct des Ortes, der auf der gegebenen Ebene liegt, ist augenscheinlich (64) ein Berührungspunct zwischen dieser Ebene und einer Fläche des Netzes; man hat also den Satz:

Der Ort der Berührungspuncte zwischen einer Ebene und den Oberflächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Curve der $3(\nu-1)$-ten Ordnung.

Diese Curve ist die *Jacobiana* [1]) des Netzes, welches durch die Curven entsteht, in denen die Flächen des Netzes von der gegebenen Ebene geschnitten werden.

129. Man hat vier projectivische Flächennetze der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten, ν_4-ten Ordnung; was ist dann der Ort der Puncte, in welchen sich vier entsprechende Flächen schneiden? Die beiden ersten Netze erzeugen nach und nach mit dem dritten und vierten Netze combiniert (127) zwei Flächen von den respectiven Ordnungen $\nu_1+\nu_2+\nu_3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_4$. Diese beiden Flächen haben die Curve der $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung gemein, welche von den beiden ersten Netzen erzeugt wird (126), sie schneiden sich ausserdem noch längs einer Curve von der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\nu_1+\nu_2+\nu_4)-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2);$$

das heisst:

Der Ort eines Punctes, durch welchen vier entsprechende Flächen von vier projectivischen Netzen hindurchgehen, deren Ordnungszahlen bezüglich $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sind, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_4+\nu_4\nu_1+\nu_1\nu_3+\nu_4\nu_2.$$

Diese Curve enthält offenbar eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je $\nu_2\nu_3\nu_4+\nu_3\nu_4\nu_1+\nu_4\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_2\nu_3$ Puncten, die durch je vier entsprechende Büschel der vier Netze entstehen (124).

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 95.

130. Was ist der Ort der Doppelpuncte der Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung? Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vier beliebig im Raum, aber nicht in derselben Ebene angenommene Puncte. Ihre ersten Polarflächen in Bezug auf die gegebenen Flächen bilden (74) vier dem gegebenen Netze also auch unter sich projectivische Netze, und der gesuchte Ort ist (125) der Ort der Puncte, durch welche je vier entsprechende Flächen dieser vier Netze hindurchgehen. Folglich hat man (129):

Der Ort der Doppelpuncte der Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Raumcurve der $6(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Diese Curve enthält unendlich viele Gruppen von je $4(\nu-1)^3$ Puncten, von denen jede Gruppe aus den Doppelpuncten eines Büschels besteht, das in dem Netze enthalten ist (125).

Die Flächen eines Netzes, welche durch den nämlichen beliebigen Punct gehen, bilden ein Büschel; ist nun dieser Punct ein Doppelpunct für eine dieser Flächen, so haben die andren in ihm die nämliche Tangentialebene; *man kann also die obenerwähnte Curve $6(\nu-1)^2$-ter Ordnung auch als den Ort der Puncte definieren, in denen sich die Flächen des Netzes berühren.*

131. Gegeben fünf projectivische Flächennetze, deren Ordnungszahlen bezüglich ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 sind; wieviel Puncte gibt es dann, durch welche je fünf entsprechende Flächen gehen? Combiniert man die beiden ersten Netze zunächst mit dem dritten, dann mit dem vierten und endlich mit dem fünften Netze, so entstehen dadurch (127) drei Flächen, deren Ordnungszahlen bezüglich $\nu_1+\nu_2+\nu_3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_4$, $\nu_1+\nu_2+\nu_5$ sind. Diese Flächen haben diejenige Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung gemein, welche (126) den beiden ersten Netzen zugehört. Man berechne jetzt die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser Curve, indem man beachtet, dass sie (126) mit einer andern Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung bildet. Diese letzte Curve ist der vollständige Durchschnitt zweier Flächen der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung und hat folglich (117) als osculierende Developpable eine Fläche von der $\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung; die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$ ist also (120) gleich

$$2(\nu_1+\nu_2-1)(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2).$$

Dies vorausgeschickt, haben diejenigen drei Flächen der bezüglichen Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3,\ \nu_1+\nu_2+\nu_4,\ \nu_1+\nu_2+\nu_5,$$

welche gleichzeitig durch die vorgenannte Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$ gehen ausserdem noch (121)

$$\begin{aligned}&(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\nu_1+\nu_2+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_5)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)\{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+(\nu_1+\nu_2+\nu_4)+(\nu_1+\nu_2+\nu_5)-2\}\\&+2(\nu_1+\nu_2-1)(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\end{aligned}$$

andere gemeinschaftliche Puncte; wir erhalten also den Satz:

Die Zahl der Puncte, durch welche je fünf entsprechende Flächen von fünf projectivischen Netzen bezüglich von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 hindurchgehen ist:

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_2\nu_4+\cdots+\nu_3\nu_4\nu_5.$$

Diese Puncte liegen auf den zehn Flächen, welche durch die Netze zu drei und drei genommen entstehen (127) und auch auf den fünf Curven, welche die Netze zu vier und vier genommen erzeugen (129).

132. Was ist der Ort eines Punctes, welcher dieselbe Polarfläche hat sowohl in Bezug auf eine gegebene Fläche ν_1-ter Ordnung als in Bezug auf irgend eine Fläche eines Flächennetzes ν_2-ter Ordnung? Es sei x ein beliebiger Punct einer Transversale, X die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche (ν_1); der Ort der Pole von X in Bezug auf die Flächen (ν_2) ist dann (128) eine Fläche $3(\nu_2-1)$-ter Ordnung, welche die Transversale in $3(\nu_2-1)$ Puncten x' trifft. Nimmt man umgekehrt beliebig auf der Transversale den Punct x' an, so bilden (74), die Polarebenen von x' in Bezug auf die Flächen (ν_2) ein Netz (ein Ebenenbündel), das heisst, sie gehen sämmtlich durch den nämlichen Punct, und es gibt also unter ihnen ν_1-1, welche die Developpable berühren (93), welche von den Polarebenen der Puncte der Transversale in Bezug auf die Fläche (ν_1) eingehüllt wird. Diese ν_1-1 Ebenen sind die Polarebenen in Bezug auf die Fläche (ν_1) von ebensovielen Puncten x der Transversale; man hat also auch den Satz:

Der Ort eines Punctes, welcher dieselbe Polarebene in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung hat und in Bezug auf eine beliebige Fläche eines Netzes ν_2-ter Ordnung, ist eine Fläche der $(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

Offenbar geht diese Fläche durch die Raumcurve der $6(\nu_1-1)^2$-ten Ordnung, welche der Ort der Doppelpuncte der Flächen des Netzes ist (130), weil jeder Punct dieser Curve eine unbestimmte Polarebene in Bezug auf jede beliebige Fläche des Netzes besitzt.

Jeder gemeinschaftliche Punct zwischen dem gefundenen Orte und der gegebenen Fläche (ν_1) ist in Bezug auf diese der Pol der Tangentialebene in demselben Puncte. Dieser Punct muss aber in Bezug auf eine Fläche des Netzes dieselbe Polarebene haben, folglich ist (64) jeder gemeinschaftliche Punct des Ortes und der festen Fläche ein Berührungspunct der letztern mit einer Fläche des Netzes. Das liefert den Satz:

Der Ort der Berührungspuncte zwischen einer festen Fläche ν_1-ter Ordnung und den Flächen eines Netzes der ν_2-ten Ordnung ist eine Raumcurve der $\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

133. Gegeben ein Flächenbüschel ν_1-ter Ordnung und ausserdem ein Flächennetz ν_2-ter Ordnung; was ist dann der Ort eines Punctes, in dem eine Fläche des Büschels eine Fläche des Netzes berührt?

Der Ort geht durch die Basiscurve ν_1^2-ter Ordnung des Büschels, weil [1]) die Flächen (ν_2), die durch einen Punct dieser Curve gehen, ein Büschel bilden, in dem eine Fläche existiert, welche in diesem Puncte eine der Flächen (ν_1) berührt. Ausserdem enthält jede Fläche (ν_1) eine Curve der $\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung, welche aus den Puncten entsteht (132), in denen sie von den Flächen (ν_2) berührt wird. Folglich ist der vollständige Durchschnitt einer Fläche (ν_1) mit dem gesuchten Orte eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4),$$

und es entsteht daher der Satz:

Der Ort der Puncte, in denen sich die Flächen eines Büschels ν_1-ter Ordnung und die Flächen eines Netzes ν_2-ten Ordnung berühren, ist eine Fläche der $(2\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

Ist $\nu_2=\nu_1=\nu$, und haben ausserdem das Netz und das Büschel eine Fläche gemein, was zum Beispiel der Fall ist, wenn sie demselben linearen Systeme angehören, so zerfällt der Ort in diese Fläche und in eine andere von der Ordnung:

$$2\nu+3\nu-4-\nu=4(\nu-1).$$

Wenn aber eine Fläche des Netzes und eine des Büschels sich in einem Puncte berühren, so individualisieren sie ein Büschel, dessen Flächen sich sämmtlich in demselben Puncte berühren, und die dem linearen Systeme angehören, welches durch das gegebene Netz und das gegebene Büschel bestimmt wird. Unter diesen Flächen ist nun eine, für welche der Berührungspunct ein Doppelpunct ist (17, 114 Anmerkung [1])); also gilt der Satz:

Der Ort der Berührungspuncte oder auch der Doppelpuncte der Flächen eines linearen Systems ν-ter Ordnung ist eine Fläche $4(\nu-1)$-ter Ordnung.

CAPITEL VII.

PROJECTIVISCHE LINEARE FLÄCHENSYSTEME DRITTER STUFE.

134. Man habe zwei lineare projectivische Flächensysteme ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, und es seien P, P'; Q, Q'; R, R'; S, S' vier Paar entsprechender Flächen; die projectivischen Büschel (P, Q), (P', Q') aus ent-

[1]) Haben zwei Flächenbüschel einen Basispunct $\mathfrak{o}$ gemein, so gibt es immer eine Fläche des ersten Büschels, welche in ihm eine Fläche des zweiten berührt. Die Tangentialebenen der Flächen des ersten Büschels in $\mathfrak{o}$ gehen nämlich durch ein und dieselbe Gerade, die Tangente der Basiscurve dieses Büschels in $\mathfrak{o}$, und in derselben Weise ist die Tangente der Basiscurve des zweiten Büschels in $\mathfrak{o}$ diejenige Gerade, durch welche in diesem Puncte die Tangentialebenen der Flächen dieses zweiten Büschels gehen. Die Ebene der beiden Tangenten berührt also in $\mathfrak{o}$ eine Fläche des ersten Büschels und ebenso eine des zweiten.

sprechenden Flächen der beiden Systeme gebildet erzeugen (113) eine Fläche $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung. Eine analoge Fläche wird durch die zwei Büschel (P, R), (P', R') erzeugt, und eine dritte von den Büscheln (P, S), (P', S'). Diese drei Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung haben diejenige Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gemein, welche den Durchschnitt der Flächen (P', P) bildet und schneiden sich also (121) noch in $(\nu_1+\nu_2)(\nu_1^2+\nu_2^2)$ andern Puncten. Ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ von diesen liegt auf gewissen Flächen Q_0, R_0, S_0, welche bezüglich den Büscheln (P, Q), (P, R), (P, S) angehören, und auch den entsprechenden Flächen Q'_0, R'_0, S'_0, welche bezüglich den Flächenbüscheln (P', Q'), (P', R'), (P', S') angehören. Der Punct $\mathfrak{x}$ ist also ein gemeinsamer Basispunct der Büschel (Q_0, R_0), (Q_0', R'_0). Von diesen Büscheln hat das erste mit dem Büschel (Q, R) eine Fläche gemein, und das zweite eine Fläche mit dem Büschel (Q', R'), und diese beiden Flächen sind entsprechend. Der Punct $\mathfrak{x}$ liegt daher auch auf der Fläche, welche durch die projectivischen Büschel (Q, R), (Q', R') entsteht; also gilt der Satz:

Hat man zwei projectivische lineare Flächensysteme ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, so gehen die Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, welche durch je zwei Büschel erzeugt werden die aus entsprechenden Flächen beider Systeme bestehen, sämmtlich durch die nämlichen

$$(\nu_1+\nu_2)(\nu_1^2+\nu_2^2)$$

Puncte.

Diese Puncte sind diejenigen, durch welche eine unbegrenzte Zahl von entsprechenden Flächenbüscheln hindurchgehen, oder es ist auch jeder von ihnen ein gemeinschaftlicher Basispunct zweier entsprechender Netze.

135. Wie viel Puncte gibt es, welche in Bezug auf zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen? Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes in Bezug auf die eine und die andere der beiden gegebenen Flächen bilden (88) zwei projectivische lineare Systeme der (ν_1-1)-ten, (ν_2-1)-ten Ordnung. Hat ein Punct $\mathfrak{o}$ für beide Flächen dieselbe Polarebene, so müssen die ersten Polarflächen aller Puncte der Ebene durch $\mathfrak{o}$ gehen, das heisst $\mathfrak{o}$ ist ein gemeinschaftlicher Basispunct zweier entsprechender Netze der beiden Systeme. Folglich ist (134) der Satz bewiesen:

Die Zahl der Puncte, welche in Bezug auf zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen, ist:

$$(\nu_1+\nu_2-2)[\nu_1^2+\nu_2^2-2(\nu_1+\nu_2)+2].$$

Den Complex dieser Puncte kann man *die Jacobiana der beiden gegebenen Flächen* nennen.

Ist $\nu_1=\nu_2=\nu$, so findet man (125) die Zahl der Doppelpuncte eines Flächenbüschels ν-ter Ordnung; folglich bilden die $4(\nu-1)^3$ Doppelpuncte eines Büschels die *Jacobiana* zweier beliebiger Flächen des Büschels.

Ist $\nu_2=1$, $\nu_1=\nu$, so finden wir (87) die $(\nu-1)^3$ Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf eine gegebene Fläche ν-ter Ordnung wieder, das heisst:

Die $(\nu-1)^3$ Pole einer Ebene in Bezug auf eine Fläche ν-ter Ordnung

stellen die Jacobiana zweier Flächen dar, nämlich der gegebenen Ebene und der Fundamentalfläche.

136. Es seien drei lineare projectivische Flächensysteme gegeben, deren Ordnungszahlen bezüglich ν_1, ν_2, ν_3 sind. Ein beliebiges Netz des ersten Systems erzeugt in Gemeinschaft mit den entsprechenden Netzen der andern beiden Systeme (127) eine Fläche **P** der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung. Die so entstandenen Flächen **P** bilden ein neues lineares System. In der That, sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebig im Raume angenommene Puncte, so bilden die Flächen des ersten Systems, welche durch $\mathfrak{a}$ gehen, ein Netz; im entsprechenden Netze des zweiten Systems gibt es ein Büschel von Flächen, die durch $\mathfrak{a}$ gehen, welchen im dritten Netze ein Büschel entspricht, von dem eine Fläche durch $\mathfrak{a}$ geht. Es gibt also drei entsprechende Flächen P, P', P'', die durch $\mathfrak{a}$ gehen, ebenso drei Flächen Q, Q', Q'' durch $\mathfrak{b}$ und drei andere R, R', R'', die durch $\mathfrak{c}$ gehen. Diese Flächen individualisieren drei projectivische Netze (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R''), und diese erzeugen eine Fläche **P**, die einzige, welche durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ geht.

Es seien S, S', S'' ein anderes Tripel correspondierender Flächen der drei Systeme, welche bezüglich nicht zu den drei vorgedachten Netzen gehören; dann erzeugen die Netze (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S'') eine andere Fläche $\mathbf{P}_1$, die Netze (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S'') ebenso eine dritte Fläche $\mathbf{P}_2$, und endlich die Netze (Q, R, S), (Q', R', S'), (Q'', R'', S'') eine vierte Fläche $\mathbf{P}_3$.

Die beiden Flächen $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ gehen durch die Curve von der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$, welche (122) von den drei projectivischen Büscheln (P, Q), (P', Q'), (P'', Q'') erzeugt wird, sie schneiden sich also noch in einer andern Curve der Ordnung:

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^2-(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_2\nu_1.$$

Ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ dieser letzteren Curve ist, da er der Fläche **P** angehört, drei correspondierenden Flächen A, A', A'' der drei Netze (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R'') gemein, und weil er auch $\mathbf{P}_1$ angehört, ist derselbe Punct auch auf drei entsprechenden Flächen B, B', B'' der drei Netze (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S'') gelegen. Das Netz (P, Q, S) und das Büschel (A, B) gehören demselben linearen Systeme an und haben folglich eine Fläche C gemein. Dieser entspricht im zweiten Systeme eine Fläche C', welche dem Netze (P', R', S') und dem Büschel (A', B') gemein ist, und im dritten Systeme eine Fläche C'', die dem Netze (P'', R'', S'') und dem Büschel (A'', B'') angehört. Der Punct $\mathfrak{x}$ ist also ein gemeinsamer Basispunct der Büschel (A, B), (A', B'), (A'', B'') und ist deshalb auch den Flächen C, C', C'' gemeinschaftlich. Dies sind aber drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Netze (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S''), das heisst, $\mathfrak{x}$ ist ein Punct der Fläche $\mathbf{P}_2$. In analoger Weise zeigt man, dass der nämliche Punct auch auf der Fläche $\mathbf{P}_3$ liegt. Wir haben daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen eine unbegrenzte Zahl von Tripeln

entsprechender Flächen dreier gegebener projectivischer linearer Systeme von den respectiven Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 *hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung*

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2.$$

Diese Curve kann auch als Ort der gemeinschaftlichen Basispuncte dreier entsprechender Büschel, oder als Ort der Durchschnittspuncte zwischen den entsprechenden Curven der Ordnungen ν_1^2, ν_2^2, ν_3^2 definiert werden. Sie liegt auf allen Flächen $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ter Ordnung, die ein lineares System bilden, von denen jede durch drei entsprechende Netze der drei Systeme erzeugt wird.

137. Was ist der Ort eines Punctes $\mathfrak{x}$, dessen Polarebenen in Bezug auf drei gegebene Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Ordnung durch dieselbe Gerade x gehen?

Die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf die gegebenen Flächen bilden drei projectivische lineare Systeme von den betreffenden Ordnungszahlen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1. Nach der gemachten Voraussetzung ist $\mathfrak{x}$ der Durchschnittspunct der ersten Polarflächen jedes Punctes von x, also ein Punct, durch den eine unbegrenzte Zahl von Tripeln entsprechender Flächen der drei obengenannten projectivischen Systeme hindurchgehen, folglich ist (126) der gesuchte Ort eine Raumcurve von der Ordnung

$$(\nu_1-1)^2+(\nu_2-1)^2+(\nu_3-1)^2+\left|\begin{matrix}(\nu_2-1)(\nu_3-1)\\(\nu_3-1)(\nu_1-1),\\(\nu_1-1)(\nu_2-1)\end{matrix}\right.$$

welcher wir den Namen *Jacobiana der drei gegebenen* Flächen beilegen. Wir haben also den Satz:

Die Jacobiana dreier Flächen der ν_1*-ten,* ν_2*-ten,* ν_3*-ten Ordnung, das heisst der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf die gegebenen Flächen durch dieselbe Gerade gehen, ist eine Raumcurve mit der Ordnungszahl:*

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2-4(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+6.$$

Offenbar geht diese Curve durch die Berührungspuncte der gegebenen Flächen und durch ihre Doppelpuncte, wenn solche existieren.

Dieselbe Curve geht auch durch die Puncte, welche in Bezug auf zwei der gegebenen Flächen dieselbe Polarebene haben; das heisst:

Die Jacobiana dreier Flächen geht auch durch die Jacobianen derselben Flächen zu zwei und zwei combiniert (135).

Ist $\nu_3=\nu_2$, so muss die Polarebene des Punctes $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Fläche (ν_1) durch die Gerade gehen, in der sich die Polarebenen des nämlichen Punctes in Bezug auf die Flächen des Büschels schneiden, das durch die beiden gegebenen Flächen der ν_2-ten Ordnung bestimmt wird, und fällt daher mit der Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf eine Fläche des Büschels zusammen. Man hat folglich den Satz:

Der Ort eines Punctes, welcher in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung und in Bezug auf irgend eine Fläche eines Büschels ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene hat, ist eine Raumcurve von der Ordnung:

$$\nu_1^2 + 3\nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2 - 4\nu_1 - 8\nu_2 + 6,$$

welche durch die Doppelpuncte des Büschels geht.

Die Puncte, in denen diese Curve die feste Fläche trifft, sind offenbar diejenigen Puncte, in denen letztere Fläche von irgend einer Fläche des Büschels berührt wird; man hat also den Satz:

Die Zahl der Flächen eines Büschel ν_2-ter Ordnung, welche eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung berühren, ist:

$$\nu_1(\nu_1^2 + 3\nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2 - 4\nu_1 - 8\nu_2 + 6).$$

Ist $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, so bestimmen die drei gegebenen Flächen ein Netz, und die Polarebenen des Punctes x in Bezug auf die Flächen dieses Netzes gehen durch die nämliche Gerade. Wir kommen so auf ein schon früher (130) bewiesenes Theorem zurück und haben daher den Satz:

Der Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines Netzes durch dieselbe Gerade gehen, oder auch der Ort der Doppelpuncte der Flächen dieses Netzes, oder endlich der Ort der Berührungspuncte zwischen den Flächen desselben Netzes ist eine Raumcurve $6(\nu-1)^2$-ter Ordnung.

Dieser Curve können wir den Namen *Jacobiana des Netzes* geben.

Ist eine von den Flächen eine Ebene, so fällt die Polarebene in Bezug auf sie mit ihr selbst zusammen, und man erhält so den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei gegebene Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung sich längs einer Geraden schneiden, die in einer festen Ebene liegt, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$(\nu_1-1)^2 + (\nu_2-1)^2 + (\nu_1-1)(\nu_2-1) = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_1\nu_2 - 3(\nu_1+\nu_2) + 3.$$

Ist $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, so fällt man auf ein schon früher (123) bewiesenes Theorem zurück, man hat also den Satz:

Die Curve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung, Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung, ist die Jacobiana der drei Flächen, von denen die eine die gegebene Ebene ist, und die beiden andern zwei beliebige Flächen des Büschels.

Wird $\nu_2 = \nu_3 = 1$, $\nu_1 = \nu$, so geht die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche ν-ter Ordnung durch eine feste Gerade, den Durchschnitt zwei gegebener Ebenen; folglich hat man (86):

Die Curve der $(\nu-1)^2$-ten Ordnung, Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf eine gegebene Fläche ν-ter Ordnung durch eine gegebene Gerade gehen, ist die Jacobiana folgender drei Flächen: der Fundamentalfläche und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

138. Indem wir vier lineare projectivische Systeme von den resp. Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 als gegeben annehmen, suchen wir den Ort der Puncte, durch welche je vier entsprechende Flächen hindurchgehen.

Auf einer beliebigen Transversale nehme man einen beliebigen Punct i an, durch den drei entsprechende Flächen der drei ersten Systeme hindurchgehen; die entsprechende Fläche des vierten Systems schneidet dann die Transversale in ν_4 Puncten i'. Nimmt man umgekehrt auf der Transversale beliebig einen Punct i' an, so bilden die Flächen des vierten Systems, welche durch i' gehen, ein Netz, und die drei entsprechenden Netze in den andern Systemen erzeugen (127) eine Fläche $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ter Ordnung, welche die Transversale in ebensovielen Puncten i trifft. Man erhält somit das Theorem:

Der Ort eines Punctes, durch welchen vier entsprechende Flächen von vier lineuren projectivischen Systemen von den resp. Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 hindurchgehen, ist eine Fläche von der Ordnung $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$.

Diese Fläche enthält offenbar die unbegrenzte Zahl von Curven, die durch je vier entsprechende Netze der vier Systeme entstehen (128), und ebenso unendlich viele andere Curven, die durch je drei der gegebenen Systeme entstehen (126); u. s. w.

139. Man hat vier Flächen bezüglich von der Ordnung ν_1, ν_2, ν_3, ν_4; was ist dann der Ort eines Punctes x, dessen Polarebenen in Bezug auf jene Flächen durch den nämlichen Punct x' gehen?

Die ersten Polarflächen von x' gehen durch x, und andererseits bilden die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf die vier gegebenen Flächen vier lineare projectivische Systeme bezüglich von den Ordnungen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1, ν_4-1; folglich erhält man (138) den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 durch denselben Punct gehen, ist eine Fläche mit der Ordnungszahl:

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4-4.$$

Diese Fläche, der wir den Namen J a c o b i a n a d e r v i e r g e g e b e n e n F l ä c h e n geben, *geht offenbar durch die Doppelpuncte dieser Flächen und durch die Jacobianen der nämlichen Flächen zu drei und drei oder zu zwei und zwei genommen.*

Ist $\nu_4=\nu_3$, so erhalten wir eine Fläche der $[\nu_1+\nu_2+2(\nu_3-2)]$-ten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf zwei Flächen der Ordnungen ν_1, ν_2 und in Bezug auf alle Flächen eines Büschels ν_3-ter Ordnung durch denselben Punct gehen. Ist x ein gemeinschaftlicher Punct des Ortes und der Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, Durchschnitt der beiden gegebenen Flächen, so bestimmen die Tangente dieser Curve in x und die Gerade, durch welche die Polarebenen von x in Bezug auf die Flächen des Büschels gehen, eine Ebene, die in x eine Fläche des Büschels berührt; also hat man den Satz:

In einem Flächenbüschel ν_3-ter Ordnung gibt es

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2+2\nu_3-4)$$

Flächen, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung berühren.

Es sei $\nu_4=\nu_3=\nu_2$. Dann folgt, dass die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche (ν_1) durch den Punct geht, in welchem die Polarebene desselben Punctes in Bezug auf alle Flächen des Netzes, das durch die drei gegebenen Flächen ν_2-ter Ordnung gebildet wird, zusammenlaufen, und ebenso jene Ebene auch die Polarebene von x in Bezug auf irgend eine Fläche des Netzes sein muss. Wir erhalten so ein schon bewiesenes Theorem (132) wieder und damit den Satz:

Die Fläche $(\nu_1+3\nu_2-4)$-ter Ordnung, Ort der Puncte, welche in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung und auf irgend eine Fläche eines Netzes ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen, ist die Jacobiana folgender vier Flächen: der gegebenen Fläche ν_1-ter Ordnung und drei beliebiger Flächen des Netzes, die aber kein Büschel bilden dürfen.

Ist $\nu_4=\nu_3=\nu_2=\nu_1=\nu$, so bestimmen die vier gegebenen Flächen ein lineares System, und durch x' geht also die Polarebene von x in Bezug auf eine beliebige Fläche des Systems (74); das liefert den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems ν-ter Ordnung durch denselben Punct gehen, ist eine Fläche der $4(\nu-1)$-ten Ordnung.

Die Fläche, Jacobiana von vier beliebigen Flächen des Systems, die also kein Netz bilden, kann auch als Ort der Doppelpuncte der Flächen des Systems definiert werden oder als Ort der Berührungspuncte zwischen diesen Flächen.

Wir legen dieser Fläche den Namen *Jacobiana des linearen Systems* bei.

Ist $\nu_4=1$, so erhalten wir den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf drei Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Ordnung sich auf einer festen Ebene schneiden, ist eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3-3)$-ten Ordnung.

Ist ausserdem $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu$, so treffen wir auf ein schon bewiesenes Theorem (128); daher der Satz:

Die Fläche der $3(\nu-1)$-ten Ordnung, Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung, ist die Jacobiana von folgenden vier Flächen: der gegebenen Ebene und drei beliebiger Flächen des Netzes, die aber kein Büschel bilden.

Wenn $\nu_3=\nu_4=1$ ist, finden wir ein anderes bekanntes Theorem (117) und erhalten so:

Die Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten Ordnung sich auf

einer gegebenen Geraden schneiden, ist die Jacobiana von folgenden vier Flächen, der beiden gegebenen Flächen und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

Nimmt man ausserdem $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ an, so trifft die gegebene Gerade jene Gerade, in welcher sich die Polarebenen des Punctes x in Bezug auf die Flächen des Büschels schneiden, welches durch die beiden gegebenen Flächen ν-ter Ordnung bestimmt ist, und die beiden Geraden liegen daher in einer Ebene, welche die Polarebene von x in Bezug auf eine Fläche des Büschels ist; daher der Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf eine Fläche eines Büschels ν-ter Ordnung durch eine gegebene Gerade geht, ist eine Fläche der $2(\nu-1)$-ten Ordnung. Sie ist die Jacobiana folgender vier Flächen: zwei beliebiger Flächen des Büschels und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

Endlich erhalten wir unter der Bedingung $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$, $\nu_1 = \nu$ das Theorem (62) wieder, dass nämlich der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf eine Fläche ν-ter Ordnung durch einen festen Punct geht, eine Fläche der $(\nu-1)$-ten Ordnung ist, die erste Polarfläche des festen Punctes. Man hat daher den Satz:

Die erste Polarfläche eines gegebenen Punctes ist die Jacobiana folgender vier Flächen: der Fundamentalfläche und drei beliebiger Ebenen, die durch den gegebenen Punct gehen.

140. Was ist der Ort eines Punctes, in welchem sich je fünf entsprechende Flächen von fünf gegebenen projectivischen linearen Systemen von den respectiven Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 schneiden?

Die drei ersten Systeme mit dem vierten Systeme und dann mit dem fünften combiniert erzeugen (132) zwei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\,,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5.$$

Sie haben die Curve von der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

gemein, welche durch die ersten drei Systeme erzeugt wird (136), und schneiden sich also ausserdem noch längs einer Curve von der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_2\nu_1).$$

Wir erhalten daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch den fünf entsprechende Flächen von fünf linearen projectivischen Systemen von den resp. Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_3+\dots+\nu_4\nu_5.$$

Natürlich liegt diese Curve auf den fünf Flächen, die durch die fünf Systeme

zu vier und vier genommen entstehen (138) und enthält eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_3\nu_4+\ldots+\nu_3\nu_4\nu_5$$

Puncten, von denen jede durch fünf entsprechende Netze der fünf gegebenen Systeme entsteht (125).

141. Hat man fünf Flächen bezüglich von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$, so bilden die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf jene Flächen fünf lineare projectivische Systeme von den Ordnungen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1, ν_4-1, ν_5-1; Man hat also den Satz (134):

Der Ort eines Punctes, dessen erste Polarflächen in Bezug auf fünf gegebene Flächen von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ durch denselben Punct gehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_3+\ldots+\nu_4\nu_5-4(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_5)+10.$$

Diese Raumcurve, *die Jacobiana der fünf gegebenen Flächen*, liegt offenbar auf den Jacobianen der gegebenen Flächen zu vier und vier genommen.

Ist $\nu=\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\nu_5$, so erhält man eine Curve von der $10(\nu-1)^2$-ten Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems vierter Stufe und ν-ter Ordnung durch den nämlichen Punct gehen. Diese Curve kann man *die Jacobiana des linearen Systems* nennen.

Ist $\nu_5=1$, so erhält man eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\ldots+\nu_3\nu_4-3(\nu_1+\ldots+\nu_4)+6,$$

Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen auf einer gegebenen Ebene zusammenlaufen. Sind sie alle von derselben Ordnung ν, so findet man, dass der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems dritter Stufe und ν-ter Ordnung in einen Punct einer festen Ebene zusammenlaufen, eine Raumcurve der $6(\nu-1)^2$-ten Ordnung ist.

Für $\nu_4=\nu_5=1$ erhält man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf drei Flächen sich auf einer gegebenen Geraden treffen. Sind die drei Flächen von der nämlichen Ordnung ν, so ist der Ort eine Curve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Wäre $\nu_3=\nu_4=\nu_5=1$, so erhielte man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei gegebene Flächen durch einen festen Punct gehen, das heisst, wir erhalten den Satz:

Die Curve der $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$-ten Ordnung, Durchschnitt der ersten Polarflächen eines gegebenen Punctes in Bezug auf zwei gegebene Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, ist die Jacobiana folgender fünf Flächen: der beiden gegebenen und drei beliebiger Ebenen, welche durch den gegebenen Punct gehen.

142. Man hat sechs lineare projectivische Systeme von den betreffenden Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$; man sucht die Zahl der Puncte, in denen sich je sechs entsprechende Flächen schneiden.

Die drei ersten Systeme mit dem vierten, dem fünften und endlich mit dem sechsten combiniert erzeugen (138) drei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\,,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5\,,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6\,,$$

welche die Curve der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

gemein haben, die durch die drei ersten Systeme erzeugt wird (136). Diese Curve gehört zwei Flächen der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung an, die sich also ausserdem noch in einer Curve der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$ schneiden, die ihrerseits im Verein mit einer dritten Curve ν_1^2-ter Ordnung den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen der $(\nu_1+\nu_2)$-ten und $(\nu_1+\nu_3)$-ten Ordnung bildet. Die Ordnung der osculierenden Developpablen (117) der Curve (ν_1^2) ist

$$\rho=2\nu_1^2(\nu_1-1)\,,$$

und folglich (120) ist die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$ gleich

$$\begin{aligned}\rho'&=[(\nu_1+\nu_2)+(\nu_1+\nu_3)-2][(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-\nu_1^2]+\rho\\&=(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)-\nu_1\nu_2\nu_3\,.\end{aligned}$$

Hieraus schliesst man (120), dass die osculierende Developpable der Curve der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

von der Ordnung

$$\begin{aligned}\rho''&=[(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+(\nu_1+\nu_2+\nu_3)-2]\times\\&\quad\times[(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)]+\rho'\\&=2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2)+(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\nu_1\nu_2\nu_3\end{aligned}$$

ist, und folglich haben die drei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\,,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5\,,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6$$

ausser der vorgenannten Curve noch (121)

$$\begin{aligned}&(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)\left.\begin{Bmatrix}[(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)]\\+(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)\\+(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\end{Bmatrix}\right.+\rho''=\\&(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_4+\nu_5+\nu_6)\\&-(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^3+\nu_1\nu_2\nu_3=\nu_1\nu_2\nu_3+\cdots+\nu_4\nu_5\nu_6\end{aligned}$$

gemeinschaftliche Puncte, und wir erhalten also den Satz:

Die Zahl der Puncte des Raumes, durch welche je sechs entsprechende Flächen von sechs projectivischen linearen Systemen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ..., ν_6 *hindurchgehen, ist*

$$\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1\nu_2\nu_4 + \ldots + \nu_4\nu_5\nu_6.$$

143. Auch hier kann man als Anwendung dieses Satzes *die Jacobiana von sechs gegebenen Flächen* betrachten, die aus den

$$\nu_1\nu_2\nu_3 + \nu_1\nu_2\nu_4 + \ldots + \nu_4\nu_5\nu_6 - 4(\nu_1\nu_2 + \ldots) + 10(\nu_1 + \ldots) - 20$$

Puncten besteht, von denen jeder die Eigenschaft hat, dass seine Polarebenen in Bezug auf die sechs gegebenen Flächen der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_6$ durch den nämlichen Punct gehen. Hierin ist als Specialfall die Zahl der Puncte enthalten, deren Polarebenen in Bezug auf je fünf, vier und drei der gegebenen Flächen sich bezüglich auf einer gegebenen Ebene, einer gegebenen Geraden und in einem gegebenen Puncte treffen. Zum Beispiel findet man den Satz:

Die $(\nu_1-1)(\nu_2-1)(\nu_3-1)$ *gemeinschaftlichen Puncte der ersten Polarflächen eines Punctes in Bezug auf drei gegebene Flächen bilden die Jacobiana folgender sechs Flächen: der drei gegebenen und dreier Ebenen, die durch den gegebenen Punct gehen.*

CAPITEL VIII.

PROJECTIVISCHE LINEARE FLÄCHENSYSTEME BELIEBIGER STUFE.

144. Was ist der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+1$ entsprechende Flächen von $\mu+1$ linearen projectivischen Flächensystemen μ-ter Stufe und den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{\mu+1}$ hindurchgehen [1])?

Auf einer beliebigen Transversale fixieren wir einen Punct i. Durch ihn gehen μ entsprechende Flächen der μ ersten gegebene Systeme [2]), und die entsprechende Fläche des letzten Systems trifft die Transversale in $\nu_{\mu+1}$ Puncten i'. Nimmt man umgekehrt auf der Transversale einen Punct i' beliebig an, so bilden die Flächen des letzten Systems, welche durch diesen

---

[1]) Der Kürze wegen wollen wir durch das Symbol $\mathfrak{S}_{\mu,\rho}$ die Summe der Producte von je ρ der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ bezeichnen.

[2]) Die Flächen des μ-ten Systems, die durch i gehen, bilden ein System $(\mu-1)$-ter Stufe, dem in den ersten $\mu-1$ gegebenen Systemen $\mu-1$ niedere Systeme derselben $(\mu-1)$-ten Stufe entsprechen. Angenommen von diesen Systemen gingen $\mu-1$ entsprechende Flächen durch i, so haben auch die ersten μ gegebene Systeme μ entsprechende Flächen, die durch i gehen. Wenn also die Behauptung für $\mu-1$ richtig ist, so ist sie es auch für μ; folglich u. s. w.

gehen, ein niederes System ($\mu-1$)-ter Stufe, dem in den gegebenen andern μ Systemen ebenfalls niedere Systeme von derselben ($\mu-1$)-ten Stufe entsprechen. Diese Systeme sind projectivisch, und wir wollen annehmen, dass der Ort eines Punctes, durch den μ entsprechende Flächen gehen eine Fläche von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu,1}$ sei. Diese schneidet die Transversale in $\mathfrak{S}_{\mu,1}$ Puncten i, und also haben wir $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}$ als Zahl der zusammenfallenden Puncte i, i'; das heisst, wenn der Satz„ der gesuchte Ort ist eine Fläche der $\mathfrak{S}_{\mu+1,1}$-ten Ordnung" wahr ist für $\mu=\mu-1$, so ist er auch für $\mu=\mu$ richtig. Wir haben denselben aber schon für $\mu=1,2,3$ bewiesen (107, 116, 138) und erhalten also den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+1$ entsprechende Flächen ebensovieler projectivischer linearer Systeme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+1}$ und μ-ter Stufe hindurchgehen, ist eine Fläche $\mathfrak{S}_{\mu+1,1}$-ter Ordnung.

145. Gegeben $\mu+2$ lineare projectivische Flächensysteme bezüglich von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ und μ-ter Stufe, man verlangt den Ort eines Punctes, durch den je $\mu+2$ entsprechende Flächen hindurchgehen.

Die ersten μ Systeme nach und nach mit dem vorletzten und letzten Systeme combiniert erzeugen (144) zwei Flächen von den Ordnungen $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}$, $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}$. Diese haben offenbar diejenige Curve gemein, welche den Ort der Puncte bildet, durch welche eine unbegrenzte Zahl von je μ entsprechenden Flächen der ersten μ gegebenen Systeme hindurchgehen. Wir wollen voraussetzen, die Ordnung dieser Curve sei $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$. Die beiden Flächen schneiden sich dann noch längs einer andern Curve von der Ordnung:

$$(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2})-(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}),$$

also von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$, wenn man folgende Identitäten beachtet:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{\mu+2,1}=\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}, \\ \mathfrak{S}_{\mu+2,2}=\mathfrak{S}_{\mu,2}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}, \\ \mathfrak{S}_{\mu+2,3}=\mathfrak{S}_{\mu,3}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,2}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}\mathfrak{S}_{\mu,1}. \end{cases}$$

Die zweite Curve ist der gesuchte Ort.

146. Es seien $\mu+2$ lineare projectivische Flächensysteme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ und ($\mu+2$)-ter Stufe gegeben; ein niederes System ($\mu+1$)-ter Stufe, das im ersten gegebenen Systeme enthalten ist, und die niederen Systeme, welche ihm in den andern gegebenen Systemen entsprechen, erzeugen eine Fläche von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$ (144). Zwei so erhaltene Flächen $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$-ter Ordnung entsprechen für jedes gegebene System zwei niederen Systemen von der ($\mu+1$)-ten Stufe, die in demselben gegebenen Systeme enthalten sind, und ein niederes System μ-ter Stufe gemein haben. Die beiden Flächen enthalten folglich die Curve $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$-ten Ordnung, die durch die $\mu+2$ entsprechenden niederen Systeme μ-ter Stufe erzeugt wird (145), und schneiden sich also längs einer andern Curve von der Ordnung

$$\mathfrak{S}^2_{\mu+2,1}-\mathfrak{S}_{\mu+2,2}.$$

Dieselbe liegt in allen analogen Flächen $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$-ter Ordnung [1]), und ist folglich der Ort der Puncte, durch die eine unbegrenzte Zahl von je $\mu+2$ entsprechende Flächengruppen ebensovieler linearer projectivischer Flächensysteme $(\mu+2)$-ter Stufe hindurchgehen.

Wenn also μ Systeme μ-ter Stufe eine Curve von der Ordnung $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$ erzeugen, so erzeugen auch $\mu+2$ Systeme der $(\mu+2)$-ten Stufe eine Curve der $(\mathfrak{S}^2_{\mu+2,1}-\mathfrak{S}_{\mu+2,2})$-ten Ordnung, und die Ordnung der Curve, die durch $\mu+2$ Systeme μ-ter Ordnung erzeugt wird, ist $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$. Die gemachte Voraussetzung hat nun aber für $\mu=1, 2, 3$ statt, also ist sie allgemein.

147. Angenommen, die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $\mathfrak{S}_{\mu,2}$-ter Ordnung, die (146) durch μ lineare projectivische Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe erzeugt wird, sei

$$(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ ,$$

dann bildet diese Curve zugleich mit derjenigen von der Ordnung $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$, welche durch μ lineare projectivische Systeme der μ-ten Stufe erzeugt wird, von denen die obengenannten Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe als niedere entsprechende Systeme einen Theil bilden, den vollständigen Durchschnitt von zwei Flächen $\mathfrak{S}_{\mu,1}$-ter Ordnung, und die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser letzteren Curve ist also gleich

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-2\mathfrak{S}_{\mu,2})+(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ .$$

Die letzte Curve in Verbindung mit derjenigen, von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$, welche durch $\mu+2$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe gebildet wird, deren μ erste die schon genannten sind, bildet den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen von den respectiven Ordnungen $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}, \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}$ (146), und daher ist (120) die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$ gleich

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)(\mathfrak{S}_{\mu+2,2}-\mathfrak{S}^2_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu,2})\\ +2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-2\mathfrak{S}_{\mu,2})+(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\end{aligned}$$

oder auch:

$$(\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu+2,2}+\mathfrak{S}_{\mu+2,3}\ ,$$

wenn man auf die oben (145) angegebenen Identitäten Rücksicht nimmt. Die Richtigkeit der angenommenen Voraussetzung ist aber im Falle $\mu=1, 2, 3$ schon bewiesen, und wir haben daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je μ entsprechenden Flächen ebensovieler projectivischer Systeme respective von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ und μ-ter Stufe [2]) *bestehend hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung*

$$\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}\ ,$$

---

[1]) Man beweist dies wie im Falle der Systeme dritter Stufe (136).

[2]) Das heisst, der Ort der gemeinschaftlichen Basispuncte von μ entsprechenden Büscheln.

und die Ordnung ihrer osculierenden Developpablen ist:

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ .$$

Der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+2$ entsprechende Flächen ebensovieler linearer projectivischer Systeme der respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ und μ-ter Stufe hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$. Die Ordnung ihrer osculierenden Developpablen ist:

$$(\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu+2,2}+\mathfrak{S}_{\mu+2,3}\ .$$

148. Es seien jetzt $\mu-1$ lineare projectivische Flächensysteme gegeben von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ und μ-ter Stufe. In einem derselben nehmen wir drei niedere Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe an, die ein und dasselbe niedere System $(\mu-3)$-ter Stufe in sich schliessen. Jedes der drei niedern Systeme erzeugt in Gemeinschaft mit den entsprechenden niederen Systemen der andern gegebenen Systeme eine Fläche $(\mathfrak{S}_{\mu-1,1})$-ter Ordnung (144). Die so entstandenen drei Flächen gehen gleichzeitig durch die Curve $\mathfrak{S}_{\mu-1,2}$-ter Ordnung, welche durch die $\mu-1$ niedern entsprechenden Systeme $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird (145). Da nun die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser Curve (147) gleich ist:

$$(\mathfrak{S}_{\mu-1,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu-1,2}+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}\ ,$$

so haben (121) die drei Flächen ausser dieser Curve noch

$$\mathfrak{S}_{\mu-1,1}(\mathfrak{S}_{\mu-1,1}-2\mathfrak{S}_{\mu-1,2})+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}$$

gemeinschaftliche Puncte.

Diese Puncte sind allen analogen Flächen $\mathfrak{S}_{\mu-1,1}$-ter Ordnung gemein [1]), welche den verschiedenen niedern Systemen $(\mu-2)$-ter Stufe entsprechen, die in den vorgelegten Systemen enthalten sind; also gilt der Satz:

Die Zahl der Puncte, welche einen gemeinsamen Basispunct von $\mu-1$ entsprechenden Netzen in $\mu-1$ gegebenen linearen projectivischen Flächensystemen μ-ter Stufe und von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ darstellen ist

$$\mathfrak{S}_{\mu-1,1}(\mathfrak{S}^2_{\mu-1,1}-2\mathfrak{S}_{\mu-1,2})+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}\ .$$

149. Gegeben $\mu+3$ lineare projectivische Flächensysteme μ-ter Stufe und von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{\mu+3}$; man sucht die Zahl der Puncte, welche je $\mu+3$ entsprechenden Flächen gemeinschaftlich sind.

Die μ ersten Systeme nach und nach mit dem $(\mu+1)$-ten, $(\mu+2)$-ten, $(\mu+3)$-ten Systeme combiniert erzeugen (144) drei Flächen von den respectiven Ordnungen

$$\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}\ ,\ \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}\ ,\ \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+3}\ .$$

Diese Flächen haben die Curve von der Ordnung

$$\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$$

[1]) Man beweist dies wie im Falle der Systeme dritter Stufe (135).

gemein, deren osculierende Developpable die Ordnungszahl

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}$$

hat, und welche durch die ersten μ Systeme erzeugt wird (147). Die drei Flächen haben also (121) noch folgende Zahl von Puncten gemein:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+3})\\ &-(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})(2\mathfrak{S}_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu+3,1}-2)\\ &+2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\end{aligned}$$

oder $\mathfrak{S}_{\mu+3,3}$ vermöge der Identitäten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mu+3,1}&=\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}+\nu_{\mu+3}\,,\\ \mathfrak{S}_{\mu+3,3}&=\mathfrak{S}_{\mu,3}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}+\nu_{\mu+3})\mathfrak{S}_{\mu+2}\\ &\quad+(\nu_{\mu+2}\nu_{\mu+3}+\nu_{\mu+3}\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,1}\\ &\quad+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}\nu_{\mu+3}\,.\end{aligned}$$

Wir haben also den Satz [1]):

Die Zahl der Puncte des Raumes, durch welche je $\mu+3$ entsprechende Flächen ebensovieler linearer projectivischer Flächensysteme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+3}$ und μ-ter Stufe hindurchgehen, ist $\mathfrak{S}_{\mu+3,3}$.

CAPITEL IX.

SYMMETRISCHE COMPLEXE.

150. Es seien $\mu+1$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe gegeben. Wir fixieren im ersten Systeme $\mu+1$ Flächen, die hinreichend sind, dasselbe vollständig zu individualisieren, und betrachten jedes andere durch die $\mu+1$ Flächen festgelegt, welche den obigen projectivisch entsprechen. Jede beliebige dieser $(\mu+1)^2$ Flächen, welche auf die eben aus einander gesetzte Art die $\mu+1$ Systeme bestimmen, kann man dann durch das Symbol $P_{\rho\sigma}$ bezeichnen, wo der Index ρ allen Flächen desselben Systems gemein ist, der Index σ dagegen $\mu+1$ entsprechenden Flächen.

Dies vorausgesetzt, sagen wir, die $\mu+1$ Systeme bilden einen *symmetrischen Complex,* wenn sie sämmtlich von der ν-ten Ordnung sind und ausserdem die Symbole $P_{\rho\sigma}$ und $P_{\sigma\rho}$ ein und dieselbe Fläche ausdrücken.

151. Es sei $\mu=1$, das heisst, man habe den symmetrischen Complex:

$$\begin{matrix}P_{11}\,, P_{12}\\ P_{21}\,, P_{22}\end{matrix}$$

gebildet durch die beiden projectivischen Büschel

$$(P_{11}\,, P_{12}\,, \ldots)\,, (P_{21}\,, P_{22}\,, \ldots)\,,$$

---

1) Man vergleiche Salmon, *a. a. O.*, p. 492—495.

welche die Fläche $P_{12} \equiv P_{21}$ gemein haben, die sich aber nicht selbst entspricht. Auf dieser Fläche liegen die Basiscurven beider Büschel, welche sich in den ν^3 Puncten schneiden, die den drei Flächen P_{11}, P_{12}, P_{22} gemein sind.

Die Fläche **P** der 2ν-ten Ordnung, erzeugt (107) durch die gegebenen zwei Büschel, wird längs der Basiscurve des ersten Büschels von der Fläche P_{11} dieses Büschels berührt. **P** wird in der That (107) in einem beliebigen Puncte genannter Curve von einer Fläche des ersten Büschels berührt, die derjenigen Fläche des zweiten Büschels entspricht, welche durch den nämlichen Punct geht. Aber P_{21} ist eine Fläche des zweiten Büschels und enthält die Basiscurve des ersten Büschels vollständig; folglich u. s. w.

In ähnlicher Weise wird die Fläche **P** auch von derjenigen Fläche P_{22} längs der Basiscurve des zweiten Büschels berührt, welche der Fläche P_{12} des ersten Büschels entspricht. In den gemeinschaftlichen Puncten der beiden Basiscurveu wird **P** also von beiden Flächen P_{11}, P_{12} berührt. Diese Flächen sind aber beliebig gewählt, und haben daher im Allgemeinen keinen Berührungspunct, und es sind mithin die gemeinschaftlichen Puncte der drei Flächen P_{11}, P_{12}, P_{22} für **P** Doppelpuncte. Dies liefert den Satz:

Die von zwei projectivischen Flächenbüscheln ν-ter Ordnung, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugte Fläche hat ν^3 Doppelpuncte.

Die Flächen ν-ter Ordnung, welche durch die obigen ν^3 Puncte gehen bilden ein Netz, und folglich bilden diejenigen, welche ausserdem noch durch einen andern beliebigen Punct — den wir auf **P** annehmen — gehen, ein Büschel. Die Basiscurve ν^2-ter Ordnung dieses Büschels hat daher $2\nu^3+1$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte mit **P**, die von der 2ν-ten Ordnung ist, und liegt daher vollständig auf dieser Fläche. *Jede Fläche ν-ter Ordnung also, welche durch die ν^3 Doppelpuncte von* **P** *geht, schneidet diese Fläche in zwei getrennten Curven ν^2-ter Ordnung, die sich in den genannten Puncten schneiden. Durch jeden Punct von* **P** *geht eine der vorgenannten Curven, welche die Basis eines Flächenbüchels ν-ter Ordnung bildet. Zwei beliebige von diesen Curven liegen stets auf der nämlichen Fläche ν-ter Ordnung und können also ausser den ν^3 Puncten keinen weitern Punct gemein haben.*

Die beiden Curven bilden die Basiscurven zweier Büschel ν-ter Ordnung, zwischen denen man eine solche projectivische Abhängigkeit herstellen kann, dass die durch sie erzeugte Fläche genau **P** ist. Jede Fläche des Büschels, welche durch die Basiscurve desselben hindurchgeht, schneidet in der That **P** in einer Curve ν^2-ter Ordnung, die in Gemeinschaft mit der Basis des andern Büschels die entsprechende Fläche dieses letztern bestimmt. Es gibt aber eine Fläche, die beide Basiscurven enthält, und daher sowohl dem einen als dem andern Büschel angehört. Als Theil des ersten Büschels schneidet sie **P** in einer neuen Curve, welche mit der Basis des zweiten Büschels identisch ist. *Die Fläche also, welche in diesem zweiten Büschel ihr entspricht, schneidet* **P** *längs zwei mit der Basis eben dieses zweiten Büschels zusammenfallenden Curven, das heisst, berührt* **P** *in dieser Curve.* Auf diese Weise

ist klar, *dass die Curven ν^2-ter Ordnung, welche durch die ν^3 Doppelpuncte gehen, Berührungscurven — Charakteristiken — zwischen* **P** *und gewissen Flächen ν-ter Ordnung sind die dem genannten Netze angehören.* **P** ist also (50) die einhüllende Fläche einer einfach unendlichen Reihe von Flächen, von denen je zwei durch einen beliebigen Punct des Raumes gehen; unter ihnen befindet sich auch P_{11}, P_{22}.

152. Es sei jetzt $\mu = 2$, man betrachte also den symmetrischen Complex

$$\begin{matrix} P_{11}, P_{12}, P_{13} \\ P_{21}, P_{22}, P_{23} \\ P_{31}, P_{32}, P_{33} \end{matrix}$$

dargestellt durch die drei projectivischen Flächennetze ν-ter Ordnung

$$\begin{matrix} (P_{11}, P_{12}, P_{13}, \ldots), \\ (P_{21}, P_{22}, P_{23}, \ldots), \\ (P_{31}, P_{32}, P_{33}, \ldots), \end{matrix}$$

worin $P_{23} \equiv P_{32}, P_{31} \equiv P_{13}, P_{12} \equiv P_{21}$ ist. Es sei $\mathfrak{P}$ die Fläche 3ν-ter Ordnung, die den Ort eines Punctes bildet, in dem sich je drei entsprechende Flächen der drei Netze schneiden (121), dann kann man diese Fläche in folgender Weise construieren.

Die beiden projectivischen Büschel $(P_{22}, P_{23}, \ldots), (P_{32}, P_{33}, \ldots)$, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugen (151) eine Fläche $\mathbf{P}_{11}$ der 2ν-ten Ordnung, welche von P_{33} längs der Curve $P_{32}P_{33}$, der Basis des zweiten Büschels, berührt wird. Analog geben die projectivischen Büschel $(P_{11}, P_{13}, \ldots), (P_{31}, P_{33}, \ldots)$, die ebenfalls einen symmetrischen Complex bilden, eine Fläche $\mathbf{P}_{22}$ der 2ν-ten Ordnung, die von P_{33} in der Curve $P_{31}P_{33}$ berührt wird; und die beiden projectivischen Büschel $(P_{21}, P_{23}, \ldots)$, $(P_{31}, P_{33}, \ldots)$ oder, was dasselbe ist [1]), die projectivischen Büschel $(P_{12}, P_{13}, \ldots), (P_{32}, P_{33}, \ldots)$ erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_{12}$ oder $\mathbf{P}_{21}$ der 2ν-ten Ordnung die von P_{33} längs der zwei Curven $P_{13}P_{33}, P_{23}P_{33}$ geschnitten wird, und also in den beiden Curven gemeinschaftlichen Puncten von P_{33} berührt, das

---

1) Eine Fläche 2ν-ter Ordnung, die (107) mittels zweier projectivischer Büschel $(U, V), (U', V')$, erzeugt ist, die von derselben Ordnung ν sind, lässt sich auch aus zwei projectivischen Büscheln $(U, U'), (V, V')$ herleiten, in denen zwei Flächen U'', V'' sich entsprechen wie folgt: Man nehme beliebig die Fläche U'' unter denen, welche durch UU' gehen. Diese Fläche schneidet die Fläche (2ν) längs einer andern Curve k der ν^2-ten Ordnung, durch welche man in Gemeinschaft mit VV' eine Fläche V'' der ν-ten Ordnung legen kann. In der That hat k mit der Basis VV' eine Zahl von ν^3 Puncten gemein — die gemeinschaftlichen Puncte der Flächen U'', V, V' — und eine Fläche der ν-ten Ordnung, die durch die Basis VV' und durch einen Punct von k, der nicht dieser Basis angehört, geht, hat also $\nu^3 + 1$ Puncte mit k gemein, und enthält also diese Curve vollständig.

heisst in den gemeinschaftlichen Puncten der drei Flächen P_{13}, P_{23}, P_{33}. Diese Puncte bilden die Basispuncte des dritten gegebenen Netzes.

Die mit $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}$ analogen Flächen, die mittelst Büscheln entstehen, die sich im zweiten und dritten Netze entsprechen, bilden ein neues Netz (120), und jede von ihnen kann man durch diejenigen Büschel des dritten Netzes individualisiert denken, welche zur Construction benutzt wurden. Dasselbe gilt für die zu $\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}$ analogen Flächen, die durch entsprechende Büschel des ersten und dritten Netzes entstehen. Es folgt somit, dass die Netze $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ projectivisch sind, und besonders die Büschel $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ projectivisch, welche sich in diesen Netzen entsprechen.

Die Fläche $\mathbf{P}_{11}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots)$ und die Fläche $\mathbf{P}_{21}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ entsprechen demselben Büschel (P_{32}, P_{33}) des dritten Netzes und bezüglich den Büscheln $(P_{22}, P_{23}), (P_{12}, P_{13})$ des zweiten und ersten Netzes, und diese Flächen enthalten daher ausser der Curve $P_{32}P_{33}$ diejenige Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, welche den Ort der Puncte bildet, in denen sich drei entsprechende Flächen dieser drei projectivischen Büschel schneiden. Diese zweite Curve gehört auch der Fläche $\mathfrak{P}$ an, da die obigen drei Büschel sich in den gegebenen drei Netzen entsprechen.

Analog entsprechen die Flächen $\mathbf{P}_{12}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots)$ und $\mathbf{P}_{22}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ demselben Büschel (P_{31}, P_{33}) des dritten gegebenen Netzes und bezüglich den Büscheln $(P_{21}, P_{23}), (P_{11}, P_{13})$ des zweiten resp. ersten Netzes. Sie enthalten daher ausser der Curve $P_{31}P_{33}$ die Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, welche durch die genannten drei Büschel entsteht, die ebenfalls projectivisch sind. Die fragliche Curve liegt auch auf der Fläche $\mathfrak{P}$, da die drei Büschel in den drei gegebenen Netzen sich correspondieren.

Genau in derselben Weise hat eine beliebige Fläche $\mathbf{P}_{1\rho}$ des Büschels $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12})$ mit der entsprechenden Fläche $\mathbf{P}_{2\rho}$ des projectivischen Büschels $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ — beide Flächen entsprechen demselben Büschel des dritten gegebenen Netzes — nicht nur eine Curve ν^2-ter Ordnung — Basis dieses Büschels — gemein, die auf P_{33} und auf einer Fläche des Büschels (P_{31}, P_{33}) liegt, sondern auch eine Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, die durch drei entsprechende Büschel entsteht und also auf $\mathfrak{P}$ liegt. Es folgt noch, dass $\mathfrak{P}$ und P_{33} zusammen den vollständigen Ort darstellen, der durch die projectivischen Büschel $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ erzeugt wird.

Da nun diese Büschel einen symmetrischen Complex bilden, *so wird* (151) *die Fläche $\mathfrak{P}$ von $\mathbf{P}_{11}$ und $\mathbf{P}_{22}$ längs zweier Curven von der $3\nu^2$-ten Ordnung berührt, welche auf $\mathbf{P}_{12}$ liegen;* und die Doppelpuncte von $\mathfrak{P}$ sind die gemeinschaftlichen Puncte der drei Flächen $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}$. Wir haben aber oben gesehen, dass diese Flächen gleichzeitig von P_{33} in den ν^3 Basispuncten des dritten gegebenen Netzes berührt werden, und da jeder dieser Berührungspuncte (21) vier Durchschnittspuncte der Flächen $\mathbf{P}$ absorbiert, so *hat die Fläche $\mathfrak{P}$*

$$(2\nu)^3 - 4\nu^3 = 4\nu^3$$

Doppelpuncte, durch welche alle Flächen $\mathbf{P}$ gehen.

Aus dem eben Bewiesenen folgt ausserdem:

1. $\mathfrak{P}$ ist zugleich mit P_{33} die einhüllende Fläche einer einfach unendlichen Reihe von Flächen $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22}, \ldots$ Jede Fläche $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ ist die einhüllende Fläche einer analogen Reihe von Flächen ν-ter Ordnung wie $P_{\rho\rho}$. Umgekehrt gibt jede Fläche $P_{\rho\rho}$ einer Reihe von Flächen $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ Entstehung, deren einhüllende Fläche durch $\mathfrak{P}$ und durch $P_{\rho\rho}$ dargestellt wird. Jede Fläche $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ berührt $\mathfrak{P}$ längs einer Charakteristik der $3\nu^2$-ten Ordnung, während $P_{\rho\rho}$ die Fläche $\mathfrak{P}$ in ν^2 Puncten berührt, den Basispuncten eines Netzes von Flächen $P_{\rho\sigma}$.

2. $\mathfrak{P}$ *ist auch der Ort der Doppelpuncte der Flächen* $\mathbf{P}_{\rho\rho}$. Denn ein Doppelpunct von $\mathbf{P}_{11}$ ist in allen Flächen des Büschels (P_{22}, P_{33}) und in allen denen des Büschels (P_{32}, P_{33}) gelegen, und durch ihn geht auch eine Fläche des Büschels (P_{12}, P_{13}); folglich ist dieser Punct, da er drei entsprechenden Flächen der drei genannten Büschel angehört, die in den gegebenen Netzen enthalten sind, ein Punct des Ortes $\mathfrak{P}$.

153. In ähnlicher Weise kann man die Fläche $\mathfrak{P}$ construieren, die den Ort der Puncte bildet, in denen sich je drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Netze

$$(P, \ Q, \ R, \ldots),$$
$$(P', \ Q', \ R', \ldots),$$
$$(P'', \ Q'', \ R'', \ldots)$$

von den respectiven Ordnungen ν, ν', ν'' schneiden, die keinen symmetrischen Complex bilden (127).

Die beiden projectivischen Büschel (Q', R'), (Q'', R'') erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_1$ von der $(\nu'+\nu'')$-ten Ordnung, welche durch R'' in den beiden Curven $R''Q''$, $R''R'$ geschnitten wird.

Die beiden projectivischen Büschel (Q'', R''), (Q, R) erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}'_1$ der Ordnung $\nu''+\nu$, die von R'' längs der beiden Curven $R''Q''$, $R''R$ geschnitten wird.

Die beiden projectivischen Büschel (P', R'), (P'', R'') erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_2$ von der Ordnung $\nu'+\nu''$, die von R'' in den beiden Curven $R''P''$, $R''R'$ geschnitten wird.

Endlich erzeugen die beiden projectivischen Büschel (P'', R''), (P, R) eine Fläche $\mathbf{P}'_2$ der $(\nu''+\nu)$-ten Ordnung, welche von R'' längs der beiden Curven $R''P''$, $R''R$ geschnitten wird.

Die Flächen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ bestimmen ein Büschel $(\nu'+\nu'')$-ter Ordnung, welches dem Büschel (Q'', P'') projectivisch ist. Ist S'' eine beliebige Fläche dieses letzten Büschels, so erzeugen die entsprechenden und daher projectivischen Büschel (S', R'), (S'', R'') diejenige Fläche $\mathbf{P}$ des Büschels $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, welche S'' entspricht.

Analog bestimmen die Flächen $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ ein Büschel von der $(\nu''+\nu)$-ten Ordnung, das ebenfalls dem Büschel (Q'', P'') projectivisch ist. Die S'' ent-

sprechende Fläche $\mathbf{P}'$ wird von den entsprechenden projectivischen Büscheln (S'', R'') (S, R) erzeugt.

Die Flächen $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ enthalten offenbar ausser der Curve $R''S''$ die Curve der $(\nu\nu'+\nu'\nu''+\nu''\nu)$-ten Ordnung, Ort eines Punctes (122) in dem sich drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Büschel (S, R), (S', R'), (S'', R'') schneiden. Diese Curve liegt auf $\mathfrak{P}$, da die drei obigen Büschel sich in den drei gegebenen Netzen entsprechen. Wir haben daher das Endergebniss: *Die projectivischen Büschel* $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2)$ *erzeugen einen Ort, der aus den Flächen* R'' *und* $\mathfrak{P}$ *zusammengesetzt ist.*

154. Wir setzen jetzt voraus, es sei $\nu''=\nu'=\nu$. In diesem Falle schneidet (152, *Anmerkung*) eine beliebige Fläche R_0 des Büschels (R', R'') die Flächen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ in zwei Curven, die bezüglich auf zwei Flächen Q_0, P_0 liegen, welche den Büscheln (Q', Q''), (P', P'') angehören. Daraus folgt, dass die projectivischen Netze

$$\begin{gathered}(P, Q, R, \ldots),\\(P_0, Q_0, R_0, \ldots),\\(P'', Q'', R'', \ldots)\end{gathered}$$

denselben Flächen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ Entstehung geben, und eine Fläche 3ν-ter Ordnung erzeugen, welche mit $\mathfrak{P}$ vier Curven der $3\nu^2$-ten Ordnung gemein hat, und also vollständig mit dieser Fläche zusammenfällt. Das heisst:

Wird eine Fläche 3ν-ter Ordnung durch drei projectivische Netze

$$\begin{gathered}(P, Q, R, \ldots),\\(P', Q', R', \ldots),\\(P'', Q'', R'', \ldots),\end{gathered}$$

ν-ter Ordnung erzeugt, so kann man für ein beliebiges dieser Netze, z. B. für das zweite, ein neues Netz

$$(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$$

substituieren, das den gegebenen projectivisch ist, und aus Flächen gebildet wird, die bezüglich den Büscheln (P', P''), (Q', Q''), (R', R''), ... *angehören.*

Analog können wir einem der drei gegebenen Netze

$$(P, Q, R, \ldots)$$

ein neues Netz

$$(P_1, Q_1, R_1, \ldots)$$

substituieren, wo die Flächen $P_1, Q_1, R_1, \ldots$ bezüglich den Büscheln (P', P_0), (Q', Q_0), (R', R_0), ... angehören oder, was dasselbe ist, den Netzen (P, P', P''), (Q, Q', Q''), (R, R', R''). Man kann endlich *dieselbe Fläche $\mathfrak{P}$ auch mittelst drei neuer Netze*

$$\begin{gathered}(P_1, Q_1, R_1, \ldots),\\(P_2, Q_2, R_2, \ldots),\\(P_3, Q_3, R_3, \ldots),\end{gathered}$$

erzeugen, die den gegebenen projectivisch sind und aus Flächen

$$P_1, P_2, P_3, \ldots; \; Q_1, Q_2, Q_3, \ldots; \; R_1, R_2, R_3, \ldots$$

gebildet werden, welche bezüglich den Netzen

$$(P, P', P'', \ldots),$$
$$(Q, Q', Q'', \ldots),$$
$$(R, R', R'', \ldots),$$

angehören.

Aber noch mehr: Die projectivischen Netze

$$(P, P', P'', P_1, \ldots),$$
$$(Q, Q', Q'', Q_1, \ldots),$$
$$(R, R', R'', R_1, \ldots),$$

erzeugen eine Fläche $3\nu^2$-ter Ordnung, welche die vier Curven

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_2, \mathbf{P}_2\mathbf{P}'_2$$

der $3\nu^2$-ten Ordnung enthält und also mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Die Projectivität dieser drei Netze lässt sich sehr leicht bestimmen. Es sei P_1 eine beliebige Fläche des Büschels (P, P'); die entsprechende Fläche Q_1 bestimmt sich dann in der Art, dass die von den projectivischen Büscheln (P, P', P_1), (Q, Q', Q_1) erzeugte Fläche mit derjenigen zusammenfällt, die durch die Büschel (P, Q), (P', Q') erzeugt wird. Dadurch ist aber das Gesetz des gegenseitigen Entsprechens gegeben. Man gelangt also so stufenweise zur Auflösung des allgemeineren Problems: Man nimmt im Netze (P, P', P'') beliebig eine Fläche an, und sucht die entsprechenden Flächen der andern beiden Netze (Q, Q', Q''), (R, R', R'').

155. Wir gehen über zur Betrachtung des symmetrischen Complexes

$$\begin{matrix} P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14} \\ P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24} \\ P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{34} \\ P_{41}, P_{42}, P_{43}, P_{44}. \end{matrix}$$

bestehend aus vier projectivischen linearen Flächensystemen dritter Stufe und ν-ter Ordnung, in denen

$$P_{12} \equiv P_{21}, P_{13} \equiv P_{31}, P_{14} \equiv P_{41}, P_{23} \equiv P_{32}, P_{24} \equiv P_{42}, P_{34} \equiv P_{43}.$$

Die Fläche $\mathbf{D}$ der 4ν-ten Ordnung, Ort der Puncte, welche vier entsprechenden Flächen gemein sind (138), lässt sich in folgender Weise construieren.

Die drei projectivischen Netze

$$(P_{22}, P_{23}, P_{24}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44})$$

ergeben (152) eine Fläche $\mathfrak{P}_{11}$ der 3ν-ten Ordnung, welche durch die Fläche $\mathbf{P}$, erzeugt durch die Büschel (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}), längs einer Curve $3\nu^2$-ter

Ordnung berührt wird — dieselbe liegt auf der Fläche, die durch die Büschel (P_{32}, P_{34}), (P_{42}, P_{44}) oder durch die Büschel (P_{23}, P_{24}), (P_{43}, P_{44}) erzeugt wird — und der Ort eines Punctes ist, in dem sich je drei entsprechende Flächen der projectivischen Büschel (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) schneiden.

In ähnlicher Weise erzeugen die drei projectivischen Netze

$$(P_{11}, P_{13}, P_{14}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44})$$

eine Fläche $\mathfrak{P}_{22}$ der 3ν-ten Ordnung, welche von der Fläche **P** in einer Curve $3\nu^2$-ter Ordnung berührt wird, die auf der durch die Büschel (P_{13}, P_{14}), (P_{34}, P_{44}) oder die Büschel (P_{31}, P_{34}), (P_{41}, P_{44}) erzeugten Fläche liegt und der Ort eines Punctes ist, der je drei entsprechenden Flächen der projectivischen Büschel (P_{13}, P_{14}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) gemeinschaftlich ist.

Endlich erzeugen die drei projectivischen Netze:

$$(P_{21}, P_{23}, P_{24}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44})$$

oder, was dasselbe sagen will (154), die drei projectivischen Netze:

$$(P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44})$$

eine Fläche $\mathfrak{P}_{12}$ oder $\mathfrak{P}_{21}$ der 3ν-ten Ordnung, welche von der Fläche **P** in den beiden obenerwähnten Curven $3\nu^2$-ter Ordnung geschnitten wird. Daraus folgt, dass die gemeinschaftlichen Puncte dieser beiden Curven, also die $4\nu^3$ Puncte, durch welche (124) je vier entsprechende Flächen der projectivischen Büschel

$$(P_{13}, P_{14}), (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44})$$

hindurchgehen, so beschaffen sind, dass in jedem derselben die Fläche **P** alle drei Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$ berührt.

Die Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}$ bestimmen ein zu dem Büschel (P_{42}, P_{41}) projectivisches Büschel. Ist $P_{4\rho}$ eine beliebige Fläche dieses letztern Büschels und sind $P_{3\rho}, P_{2\rho}, P_{1\rho}$ die entsprechenden Flächen der Büschel (P_{32}, P_{31}), (P_{22}, P_{21}), (P_{12}, P_{11}), so entsteht die entsprechende Fläche $\mathfrak{P}_{1\rho}$ des Büschels $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12})$ durch die projectivischen Netze

$$(P_{2\rho}, P_{23}, P_{24}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44}) .$$

Die Flächen $\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22}$ bestimmen ein anderes demselben vorgenannten Büschel (P_{42}, P_{41}) projectivisches Büschel. Die Fläche $\mathfrak{P}_{2\rho}$ des Büschels $(\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22})$, welche $P_{4\rho}$ entspricht, entsteht durch die drei projectivischen Netze

$$(P_{1\rho}, P_{13}, P_{14}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44}) .$$

Die beiden Flächen $\mathfrak{P}_{1\rho}, \mathfrak{P}_{2\rho}$ der 3ν-ten Ordnung gehen gleichzeitig durch die Curve der $3\nu^2$-ten Ordnung, die durch die Büschel $(P_{\rho 3}, P_{\rho 4})$, (P_{33}, P_{34}) erzeugt wird, und auf der Fläche **P** liegt, und schneiden sich also ausserdem noch in einer Curve $6\nu^2$-ter Ordnung, Ort eines Punctes (129), der je vier entsprechenden Flächen der vier projectivischen Netze

$$(P_{1\rho}, P_{13}, P_{14}), (P_{2\rho}, P_{23}, P_{24}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44})$$

angehört. Diese Curve liegt auch auf der Fläche $\mathbf{D}$, weil diese vier Netze in den gegebenen Systemen sich entsprechen, und die beiden projectivischen Büschel $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}), (\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22})$ erzeugen also einen Ort, der aus der Fläche $\mathbf{P}$ 2ν-ter Ordnung und der Fläche $\mathbf{D}$ der 4ν-ten Ordnung zusammengesetzt ist.

Die Doppelpuncte des zusammengesetzten Ortes sind also (151) die Durchschnittspuncte der drei Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$. Diese drei Flächen besitzen aber $4\nu^3$ Berührungspuncte, welche $4.4\nu^3$ Durchschnittspuncten gleichgelten, und also ist die Zahl der Doppelpuncte gleich

$$(3\nu)^3 - 4.4\nu^3 = 11\nu^3 .$$

Nun sind die Doppelpuncte von $\mathbf{P}$ die ν^3 Durchschnittspuncte der Flächen P_{33}, P_{44}, P_{34} und folglich hat die Fläche $\mathbf{D}$ eine Zahl von $10\nu^3$ Doppelpuncten, die auf allen zu $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$ analogen Flächen liegen.

Da die Fläche $\mathbf{D}$ zugleich mit $\mathbf{P}$ vermittelst zweier projectivischer Büschel entsteht, welche einen symmetrischen Complex bilden, so wird sie von den Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}$ und allen ähnlichen längs ebensovielen Charakteristiken $6\nu^2$-ter Ordnung berührt, und die Berührungspuncte zweier Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}$ liegen beide auf ein und derselben Fläche $\mathfrak{P}_{12}$.

Man kann ausserdem $\mathbf{D}$ *als den Ort der Doppelpuncte der Flächen* $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \ldots$ *definieren.* Die Doppelpuncte von $\mathfrak{P}_{11}$ sind nämlich (152) diejenigen, welche einer unbegrenzten Zahl von Flächen gemein sind, z. B. diejenigen, welche durch die Paare von projectivischen Flächenbüscheln

$$\begin{array}{ll} \lambda) & (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) ; \\ \rho) & (P_{32}, P_{33}), (P_{42}, P_{43}) ; \\ \sigma) & (P_{22}, P_{24}), (P_{42}, P_{44}) ; \\ \varkappa) & (P_{22}, P_{23}), (P_{42}, P_{43}) \end{array}$$

erzeugt werden, mit Ausnahme der gemeinschaftlichen Puncte der Flächen P_{42}, P_{43}, P_{44}. Ist also $\mathfrak{x}$ einer dieser Doppelpuncte, so gehen durch $\mathfrak{x}$ zwei entsprechende Flächen A_3, A_4 der Büschel λ), zwei entsprechende Flächen B_3, B_4 der Büschel ρ), zwei entsprechende Flächen C_3, C_4 der Büschel σ) und zwei entsprechende Flächen B_2, B_4 der Büschel $\varkappa$). Die Büschel der Colonne rechts sind in ein und demselben Netze (P_{42}, P_{43}, P_{44}) enthalten, und die Flächen eines Netzes, welche durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}$, der kein Basispunct des Netzes ist, gehen, bilden ein Büschel; folglich gehören die Flächen A_4, B_4, C_4 demselben Büschel an, das in dem vierten gegebenen Systeme enthalten ist. Den Büscheln, welche dem letztern im zweiten und dritten gegebenen Systeme entsprechen, gehören bezüglich die Flächenpaare $(B_2, C_2), (A_3, B_3)$ an; und der Punct $\mathfrak{x}$, der allen diesen Flächen gemein ist, ist daher ein gemeinschaftlicher Basispunct drei entsprechender Netze in drei der gegebenen Systeme (dem zweiten, dritten und vierten). Durch

$\mathfrak{x}$ geht auch eine Fläche des Büschels, welche jenen im ersten Systeme entspricht. Der Punct $\mathfrak{x}$ liegt also in vier entsprechenden Flächen der vier gegebenen Systeme und ist daher ein Punct des Ortes **D**; w. z. b. w.

156. Wir wollen zuletzt die Fläche **D** der $\mu\nu$-ten Ordnung betrachten, die der Ort eines Punctes ist, durch den je μ entsprechende Flächen von μ linearen projectivischen Flächensystemen $(\mu-1)$-ter Stufe und ν-ter Ordnung hindurchgehen. Den Complex der μ Systeme setzen wir vorläufig als nicht symmetrisch voraus; dann erhalten wir durch die Flächen, welche diese Systeme individualisieren, die quadratische Matrix

$$\begin{matrix} P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1\mu} \\ P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2\mu} \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ P_{\mu 1}, P_{\mu 2}, \ldots, P_{\mu\mu} \end{matrix} \;,$$

die μ Zeilen und μ Colonnen besitzt. Die Flächen derselben Zeile gehören demselben Systeme an, während die Flächen derselben Colonne sich entsprechen.

Lassen wir in der Matrix die ρ-te Zeile und σ-te Colonne aus, so erhalten wir einen niederen Complex aus $\mu-1$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-2)$-ter Stufe. Wir wollen durch $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ die Fläche $(\mu-1)\nu$-ter Ordnung bezeichnen, die von ihnen erzeugt wird (144).

Lässt man nur die σ-te Colonne aus, so erhält man einen Complex von μ niedern projectivischen Systemen der $(\mu-2)$-ten Stufe; es sei hier k_σ die Curve der $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\nu^2$-ten Ordnung, die sie erzeugen (147), eine Curve, die offenbar auf **D** liegt und auf allen Flächen $\mathbf{D}_{1\sigma}, \mathbf{D}_{2\sigma}, \ldots, \mathbf{D}_{\mu\sigma}$.

Lassen wir nur die ρ-te Zeile in derselben Matrix aus, so behalten wir $\mu-1$ projectivische Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe übrig. Es sei l_ρ die von ihnen erzeugte Curve (147) der Ordnung:

$$\left[(\mu-1)^2-\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2}\right]\nu^2=\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2\;.$$

Diese Curve liegt auf **D** und auf allen Flächen $\mathbf{D}_{\rho 1}, \mathbf{D}_{\rho 2}, \ldots, \mathbf{D}_{\rho\mu}$.

Vertauschen wir jetzt in der gegebenen Matrix die Zeilen mit den Colonnen, so dass wir die neue Matrix

$$\begin{matrix} P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{\mu 1} \\ P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{\mu 2} \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \; \cdot \\ P_{1\mu}, P_{2\mu}, \ldots, P_{\mu\mu} \end{matrix}$$

erhalten, so stellt diese einen neuen Complex von μ linearen projectivischan Syste-

men der $(\mu-1)$-ten Stufe dar[1]). Es sei $\mathfrak{C}$ die Fläche $\mu\nu$-ter Ordnung, die diese Systeme erzeugen, und man bezeichne durch $\mathfrak{C}_{\rho\sigma}$ die Fläche der $(\mu-1)\nu$-ten Ordnung, die aus der inversen Matrix auf dieselbe Weise entsteht, wie $\mathfrak{D}_{\rho\sigma}$ aus der primitiven Matrix erhalten wurde; durch h_ρ, m_σ aber die zu k_σ, l_ρ analogen Curven.

Nimmt man an, es sei $\mathfrak{D}_{\rho\sigma}$ und $\mathfrak{C}_{\rho\sigma}$ eine einzige Fläche, dann fällt auch die Curve k_σ, die den Flächen $\mathfrak{D}_{1\sigma}, \mathfrak{D}_{2\sigma}, \ldots, \mathfrak{D}_{\mu\sigma}$ gemein ist, mit der Curve m_σ zusammen, die den Flächen $\mathfrak{C}_{\sigma 1}, \mathfrak{C}_{\sigma 2}, \ldots, \mathfrak{C}_{\sigma\mu}$ gemeinschaftlich angehört; und in ähnlicher Weise fällt l_ρ mit h_ρ zusammen. Folglich haben die Flächen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ alle Curven k und l gemein, und fallen daher in eine einzige Fläche zusammen, die von $\mathfrak{D}_{\rho\sigma}$ in zwei Curven k_σ, h_ρ beide von der Ordnung $\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2$ geschnitten wird. Die eine derselben liegt auf allen Flächen $\mathfrak{D}_{1\sigma}, \mathfrak{D}_{2\sigma}, \ldots$, die andere auf allen Flächen $\mathfrak{D}_{\rho 1}, \mathfrak{D}_{\rho 2}, \ldots$ Die angenommene Voraussetzung ist aber für $\mu = 2$ und $\mu = 3$ bewiesen (152, 154); folglich gilt sie allgemein.

Lassen wir in der gegebenen Matrix die ρ-te und σ-te Colonne aus, so erhalten wir μ niedere projectivische Systeme $(\mu-3)$-ter Stufe, und die Zahl der von ihnen erzeugten Puncte ist (149)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\nu^3 .$$

Diese Puncte sind offenbar h_ρ und k_σ gemein, und daher wird in diesen Puncten die Fläche $\mathfrak{D}$ von der Fläche $\mathfrak{D}_{\rho\sigma}$ berührt.

157. Es sei jetzt der durch die gegebene Matrix dargestellte Complex symmetrisch, das heisst es sei $P_{\rho\sigma} \equiv P_{\sigma\rho}$, und daher auch $\mathfrak{D}_{\rho\sigma} \equiv \mathfrak{D}_{\sigma\rho}$, $h_\rho \equiv k_\rho$. Jetzt fallen die beiden Curven, in denen die Fläche $\mathfrak{D}_{\rho\rho}$ die Fläche $\mathfrak{D}$ schneidet, in eine einzige Curve zusammen, das heisst $\mathfrak{D}_{\rho\rho}$ berührt $\mathfrak{D}$ längs einer Curve k_ρ der $\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2$-ten Ordnung, die allen Flächen $\mathfrak{D}_{1\rho}$, $\mathfrak{D}_{2\rho}, \ldots, \mathfrak{D}_{\mu\rho}$ gemein ist, und folglich schneidet $\mathfrak{D}_{\rho\sigma}$ die Fläche $\mathfrak{D}$ in zwei Curven k_ρ, k_σ, welche die Berührungscurven (Charakteristiken) zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_{\rho\rho}$ und $\mathfrak{D}_{\sigma\sigma}$ sind.

Die beiden Flächen $\mathfrak{D}_{\rho\rho}$, $\mathfrak{D}_{\sigma\sigma}$ schneiden sich ausser in der Curve k_ρ, die sie mit $\mathfrak{D}$ gemein haben, in einer andern Curve von der Ordnung $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2}\nu^2$, die durch die $\mu-1$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird, die man erhält, wenn man in der gegebenen Matrix die ρ-te Zeile und die ρ-te und σ-te Colonne weglässt. Diese Curve liegt offenbar auch auf der Fläche $\mathfrak{X}$ der $(\mu-2)\nu$-ten Ordnung, die von den $\mu-2$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird, welche da-

---

[1]) In Betreff der Bestimmung des projectivischen Entsprechens der neuen Systeme sehe man den Schluss der No. 154.

durch entstehen, dass man die ρ-te und σ-te Zeile und die ρ-te und σ-te Colonne in der vorgelegten Matrix auslässt.

Dieselbe Eigenschaft lässt sich für jedes Paar entsprechender Flächen der Büschel $(\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\rho\sigma}), (\mathbf{D}_{\sigma\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma})$ nachweisen, die projectivisch sind, da sie (155) beide dem Büschel $(P_{\mu\sigma}, P_{\mu\rho})$ projectivisch sind. Die beiden vorgenannten Büschel erzeugen also einen aus den beiden Flächen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}$ zusammengesetzten Ort. Da dieselben beiden Büschel einen symmetrischen Complex bilden, so sind (151) die Doppelpuncte des zusammengesetzten Ortes die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der drei Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}$, $\mathbf{D}_{\sigma\sigma}$, $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$.

Nun ist $\mathbf{X}$ dasselbe in Bezug auf die beiden Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}$, was diese in Bezug auf $\mathbf{D}$ sind; folglich berührt $\mathbf{X}$ die $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}$ längs zweier Curven jede von der Ordnung $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2}\nu^3$, die man durch die Complexe der niedern Systeme erzeugen kann, welche man aus der gegebenen Matrix erhält, wenn man in beiden die ρ-te und σ-te Zeile und bezüglich die ρ-te und σ-te Colonne auslässt. Die nämlichen beiden Curven bilden auch den Durchschnitt zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$, wie man beweisen kann, indem man auf diese beiden Flächen das Raisonnement anwendet, das man oben (156) bei den Flächen $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ und $\mathbf{D}$ benutzt hat. Die drei Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}, \mathbf{D}_{\rho\sigma}$ werden daher von ein und derselben Fläche $\mathbf{X}$ berührt, und berühren sich daher selbst untereinander in den

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\nu^3$$

gemeinschaftlichen Puncten der obigen beiden Curven, das heisst, in den Puncten, die durch die niedern Systeme erzeugt werden, welche die vorgelegte Matrix liefert, wenn man die ρ-te und σ-te Zeile auslässt. Jeder dieser Berührungspuncte zählt für vier Durchschnittspuncte, und folglich ist die gemeinschaftliche Zahl der Doppelpuncte von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{X}$ gleich

$$\left[(\mu-1)^3 - 4 \cdot \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]\nu^3 = \frac{\mu(\mu^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\nu^3 + \frac{(\mu-2)[(\mu-2)^2-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3}\nu^3 .$$

Wir haben somit den Satz: *Die durch μ lineare projectivische Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe und ν-ter Ordnung, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugte Fläche $\mathbf{D}$ hat $\frac{\mu(\mu^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\nu^3$ Doppelpuncte* [1].

Wie im Falle $\mu = 3$ oder $\mu = 4$ (152, 155) würde man noch beweisen können, *dass $\mathbf{D}$ auch der Ort der Doppelpuncte der zu $\mathbf{D}_{\rho\rho}$ analogen Flächen ist.*

---

[1]) Salmon, *a. a. O,* S. 496.

CAPITEL X.

EIGENSCHAFTEN DER CONJUGIERTEN KERNFLÄCHEN.

158. Wir kehren zu der Betrachtung der Fundamentalfläche F_ν der ν-ten Ordnung zurück, die wir als ganz allgemein, also ohne vielfache Puncte voraussetzen. Wir haben gesehen (88), dass die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes ein lineares System im engern Sinne der (ν—1)-ten Ordnung bilden. Die Jacobiana dieses Systems, das heisst der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen, oder auch (90) der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen Kegel sind, ist (139) eine Fläche der 4(ν—2)-ten Ordnung. Man nennt diese Fläche die *Hessiana* oder die *Kernfläche* der Fundamentalfläche.

Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die ersten Polarflächen vier beliebiger Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$, die nicht in derselben Ebene liegen; man kann dann (139) die Hessiana als Jacobiana dieser vier Flächen (ν—1)-ter Ordnung ansehen Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes in Bezug auf diese vier Flächen bilden nun (83) einen symmetrischen Complex aus vier linearen projectivischen Systemen dritter Stufe und (ν—2)-ter Ordnung. Man hat dadurch den Satz:

Die Hessiana besitzt $10(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte, die auf einer unbegrenzten Zahl von Flächen* $3(\nu-2)$*-ter Ordnung* $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots)$ *liegen.*

Wir bezeichnen durch $P_{\rho\sigma}$ die zweite gemischte Polarfläche der beiden Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ und bedienen uns im Uebrigen der schon oben (155) angewendeten Symbole. Man sieht dann sogleich, *dass* $\mathfrak{P}_{12}$ *der Ort der Pole der Ebene* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *ist in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ (128), *und auch der Ort der Pole der Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$. Wenn aber (83) die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ die (ν—2)-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}$ ist in Bezug auf die erste Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{a}_\rho$ der Ebene $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, so ist dieselbe Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ auch die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die (ν—2)-te Polarfläche von $\mathfrak{x}$, das heisst, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ist die Polarebene von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{P}_{12}$ *ist also der Ort eines Punctes* $\mathfrak{x}$, *für den die Ebenen* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{x}$ *conjugiert sind* [1]).

Man hat den speciellen Fall: $\mathfrak{P}_{11}$ *ist der Ort der Pole der Ebene*

---

1) Der Schnitt von $\mathfrak{P}_{11}$ durch eine der Ebenen $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ist offenbar der Ort der Berührungspuncte der einen Ebene mit den ersten Polarflächen der Puncte der andern.

$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte derselben Ebene und auch der Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche die Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *berührt;* $\mathfrak{P}_{22}$ wird die nämliche Bedeutung in Bezug auf die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ haben. Wir nennen die Flächen $\mathfrak{P}_{11}$, $\mathfrak{P}_{22}$ *gemeine Polarflächen* der respectiven Ebenen $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ und die Fläche $\mathfrak{P}_{12}$ die *gemischte Polarfläche* derselben beiden Ebenen. Wir haben so (155) den Satz:

Die Hessiana wird von der gemeinen Polarfläche einer beliebigen Ebene längs einer Raumcurve $6(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, welche der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen ist, deren Pole in der gegebenen Ebene liegen. Die beiden Berührungscurven der Hessiana mit den gemeinen Polarflächen zwei beliebiger Ebenen liegen beide auf der gemischten Polarfläche dieser beiden Ebenen. Alle gemeinen und gemischten Polarflächen und folglich auch alle derartigen Raumcurven* $6(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $10(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Hessiana.*

159. Die gemeine Polarfläche $\mathfrak{P}$ einer beliebigen Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ hat $4(\nu-2)^3$ Doppelpuncte (152), die auf einer unbegrenzten Zahl von Flächen $2(\nu-2)$-ter Ordnung ($\mathbf{P}_{11}$, $\mathbf{P}_{12}$, ...) liegen. Sind $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ zwei auf einer gegebenen Geraden fixierte Puncte, und ist $\mathfrak{a}_\xi$ ein auf einer andern Geraden g beweglicher Punct, so bilden die Flächen $P_{\rho\xi}$, $P_{\sigma\xi}$ zwei projectivische Büschel, *die eine Fläche* $\mathbf{P}$ *der* $2(\nu-2)$*-ten Ordnung erzeugen, welche der Ort der Polarcurven* $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung der Geraden* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte von* g *ist* (86). Wenn aber (84) die ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ durch einen Punct $\mathfrak{a}_\eta$ gehen, so geht umgekehrt die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ in Bezug auf die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{a}_\eta$ durch $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$, das heisst, die Polarebene von $\mathfrak{a}_\xi$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}_\eta$ geht durch die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. $\mathbf{P}$ *ist daher der Ort eines Punctes* $\mathfrak{a}_\eta$, *für den die in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{a}_\eta$ *Conjugierte von* g *durch die Gerade* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ *geschnitten wird.* In dieser Definition kann man offenbar die Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ und g mit einander vertauschen, und $\mathbf{P}$ *ist also auch der Ort der Polarcurven von* g *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte von* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. Nach dem Vorhergehenden schneidet die Fläche $P_{\rho\xi}$ die Fläche $\mathbf{P}$ in zwei Curven $(\nu-2)^2$-ter Ordnung deren eine die Polarcurve der Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{a}_\xi$ von g, und die andere die Polarcurve von g in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{a}_\rho$ der Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ ist. Die $(\nu-2)^2$ gemeinschaftlichen Puncte dieser beiden Curven sind aber ebensoviele Berührungspuncte zwischen $P_{\rho\xi}$ und $\mathbf{P}$, und $\mathbf{P}$ *ist daher auch die einhüllende Fläche der zweiten gemischten Polarfläche zweier beweglicher Pole, eines auf* g, *des anderen auf* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. Wir nennen diese Fläche $\mathbf{P}$ die *gemischte Polarfläche* der Geraden g und $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$.

Für die Fläche $\mathfrak{P}$ sieht man leicht, dass die $\mathbf{P}_{12}$ die gemischte Polarfläche der Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ist. $\mathbf{P}_{11}$ hat ebenso die nämliche Bedeutung in Bezug auf zwei zusammenfallende Geraden, das heisst, $\mathbf{P}_{11}$ *ist der Ort*

der Pole, deren Quadripolarflächen die Gerade $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ *berühren*, u. s. w. Wir nennen diesen Ort die *gemeine Polarfläche* der Geraden $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$. Aus Allem erhält man schliesslich (152):

Die gemeine Polarfläche einer gegebenen Ebene wird von der gemeinen Polarfläche einer beliebigen in dieser Ebene gelegenen Geraden längs einer Raumcurve $3(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, die der Ort der Pole der Ebene in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Geraden ist. Die beiden Berührungscurven zwischen der Polarfläche der Ebene und den gemeinen Polarflächen zweier Geraden, die in dieser Ebene gezogen sind, liegen auf der gemischten Polarfläche der beiden Geraden. Alle jene gemeinen und gemischten Polarflächen der Geraden der Ebene, und folglich auch alle obigen Raumcurven* $3(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $4(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Polarfläche der gegebenen Ebene.*

160. Die Fläche $P_{\rho\sigma}$, zweite gemischte Polarfläche der Puncte $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ lässt selbst wieder eine Definition zu, die derjenigen für die Flächen $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathbf{P}_{12}$ analog ist. Geht nämlich die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\sigma$ durch einen Punct $\mathfrak{a}_\xi$, so geht umgekehrt (84) die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ durch $\mathfrak{a}_\rho$, das heisst, die Polarebene von $\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ geht durch $\mathfrak{a}_\rho$. $\mathbf{P}_{\rho\sigma}$ *ist also der Ort eines Punctes* $\mathfrak{a}_\xi$, *für den die Puncte* $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ *in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{a}_\xi$ *conjugiert sind.* Fallen die Puncte $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ zusammen, so kommt man auf die Erklärung von $P_{\rho\rho}$ zurück (*gemeine zweite Polarfläche* des Punctes $\mathfrak{a}_\rho$).

161. Die gemeine Polarfläche $\mathbf{P}$ einer beliebigen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ hat $(\nu-2)^3$ Doppelpuncte (151), die in einer unbegrenzten Zahl von Flächen $(\nu-2)$-ter Ordnung $(P_{11}, P_{12}, \ldots)$ liegen. Man wird so auf folgenden Satz geführt:

Die gemeine Polarfläche einer gegebenen Geraden wird von der zweiten gemeinen Polarfläche eines beliebigen Punctes dieser Geraden längs einer Raumcurve $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, welche die Polarcurve der Geraden in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes ist. Die beiden Berührungscurven zwischen der Polarfläche der Geraden und den zweiten gemeinen Polarflächen zweier beliebiger Puncte der nämlichen Geraden liegen auf der zweiten gemischten Polarfläche beider Puncte. Alle jene gemeinen und gemischten Polarflächen der Puncte der Geraden, und folglich auch alle obigen Curven* $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Polarfläche der gegebenen Geraden.*

162. Aus dem Vorhergehenden (159, 161) folgert man: *Die gemeine Polarfläche einer Ebene ist die einhüllende Fläche der gemeinen Polarflächen der Geraden in dieser Ebene*, und: *Die gemeine Polarfläche einer Geraden ist die einhüllende Fläche der gemeinen zweiten Polarflächen der Puncte dieser*

Geraden. Man kann noch hinzufügen (152, 155). *Die gemeinen und gemischten Polarflächen zweier Geraden, die in derselben Ebene liegen, werden von der zweiten gemeinen Polarfläche des Durchschnittspunctes dieser Geraden in den nämlichen* $(\nu-2)^3$ *Puncten berührt.* (Es folgt daraus noch, dass *die gemeine Polarfläche einer Ebene auch die einhüllende Fläche der gemeinen zweiten Polarflächen der Puncte der Ebene ist*); und: die gemeinen und gemischten Polarflächen zweier Ebenen werden von der gemeinen Polarfläche der gemeinschaftlichen Geraden beider Ebenen in denselben $4(\nu-2)^3$ Puncten berührt. Ausserdem auch noch (153): Die Raumcurve $3(\nu-2)^2$-ter Ordnung, Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte einer gegebenen Geraden, liegt auf der gemischten Polarfläche dieser Ebene und einer beliebigen andern Ebene, welche durch die gegebene Gerade geht, und ebenso auf der gemischten Polarfläche dieser Geraden und einer andern beliebigen Geraden, die in der gegebenen Ebene liegt. U. s. w.; u. s. w.

163. Die ersten Polarflächen der Puncte einer beliebigen Geraden bilden ein Büschel, welches $4(\nu-2)^3$ Flächen enthält, die einen Doppelpunct besitzen (125). Folglich der Satz:

Der Ort der Pole, deren erste Polarflächen einen Doppelpunct haben, ist eine Fläche $4(\nu-2)^3$*-ten Ordnung.*

Man nennt sie *conjugierte Kernfläche* oder *Steineriana.*

Wir können sagen (90), *die Hessiana ist der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen Kegel sind,* und *die Steineriana ist der Ort der Scheitel dieser Kegel.*

Die Hessiana und die Steineriana entsprechen sich Punct für Punct. Ist $\mathfrak{o}$ ein Doppelpunct der ersten Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$, das heisst, ist $\mathfrak{o}$ der Pol eines Quadrikegels mit dem Scheitel $\mathfrak{o}'$, so sind die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der *Hessiana* und *Steineriana.*

164. *Die Hessiana ist auch der Ort der Berührungspuncte zwischen den ersten Polarflächen* (133). Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der beiden conjugierten Kernflächen, dann bestimmt die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Gemeinschaft mit einer andern ersten Polarfläche, die durch $\mathfrak{o}$ geht, ein Flächenbüschel, dessen Flächen in $\mathfrak{o}$ von derselben Ebene E berührt werden. Jeder Punct $\mathfrak{p}$, der dieser Ebene und der Polarebene von $\mathfrak{o}$ gemein ist, besitzt eine zweite Polarfläche, die durch $\mathfrak{o}$ geht — die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{o}$ ist in der That Tangente der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}$. — Nun besitzt der Punct $\mathfrak{o}'$ aber selbst diese Eigenschaft, also liegt $\mathfrak{o}'$ auf dem Durchschnitt der Ebene E mit der Polarebene von $\mathfrak{o}$, das heisst, *die Ebene E geht stets durch die Gerade* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$.

165. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1$ zwei unendlich nahe Puncte der Hessiana; $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}'_1$ die ihnen entsprechenden Puncte der Steineriana. Sobald die ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}'_1$ unmittelbar aufeinander folgen und je einen Doppelpunct

$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1$ besitzen, geht ihre Durchschnittscurve durch $\mathfrak{o}$, und folglich muss die Polarebene von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}'_1$ gehen, welche Gerade die Steineriana in $\mathfrak{o}'$ berührt. Dies ist stets richtig, was auch die Richtung dieser Tangente ist, *und folglich ist die Polarebene eines Punctes der Hessiana Tangentialebene der Steineriana im entsprechenden Puncte.*

Man leitet hieraus ab, dass *die Steineriana eine Fläche von der* $4(\nu-1)^2(\nu-2)$-*ten Classe ist*, denn dies ist die Zahl der Durchschnittspuncte der Hessiana mit der Polarcurve einer beliebigen Geraden.

166. Die Pole einer Ebene in Bezug auf die Fundamentalfläche sind (87) die $(\nu-1)^3$ Durchschnittspuncte der ersten Polarflächen dreier Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ dieser Ebene. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punct der Steineriana, und $\mathfrak{abc}$ die Tangentialebene dieser Fläche in $\mathfrak{a}$; in diesem Falle besitzt die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunct $\mathfrak{a}'$, und die ersten Polarflächen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gehen durch $\mathfrak{a}'$. Daraus folgt der Satz: *Die Tangentialebene der Steineriana hat in einem ihrer Puncte zwei mit dem correspondierenden Puncte der Hessiana zusammenfallende Pole.*

167. Ein Doppelpunct $\mathfrak{w}$ der Hessiana liegt auf der gemischten Polarfläche zweier beliebiger Ebenen (158), das heisst, es gibt auf einer beliebigen Ebene einen solchen Punct, dass die Polarebene von $\mathfrak{w}$ in Bezug auf die erste Polarfläche dieses Punctes unbestimmt ist, oder anders ausgedrückt: es gibt in einer beliebigen Ebene einen Punct, dessen erste Polarfläche in $\mathfrak{w}$ einen Doppelpunct hat. Folglich ist $\mathfrak{w}$ ein Doppelpunct einer unbegrenzten Zahl erster Polarflächen, deren Pole, die natürlich der Steineriana angehören, (163) in gerader Linie liegen, denn es gibt einen solchen Pol in jeder beliebigen Ebene. *Dem Puncte* $\mathfrak{w}$ *entspricht also auf der Steineriana* anstatt eines einzigen Punctes *eine Gerade*, von der daher jeder Punct für die Quadripolarfläche von $\mathfrak{w}$ ein Doppelpunct ist. Das heisst: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{w}$ *ist ein Ebenenpaar, welches durch diese Gerade geht, und die Polarebene von* $\mathfrak{w}$ *berührt die Steineriana längs dieser ganzen Geraden.*

Man hat folglich den Satz:

Die Steineriana enthält $10(\nu-2)^3$ *Gerade, die einzeln den Doppelpuncten der Hessiana entsprechen.*

168. Zwei bezüglich auf der Hessiana und Steineriana gelegene Curven kann man *entsprechend* nennen, sobald die eine der Ort der entsprechenden Puncte der Puncte der andern ist. So sind zum Beispiel die ebene Curve $4(\nu-2)^3$-ter Ordnung, in der die Steineriana durch eine beliebige Ebene E geschnitten wird, und die Raumcurve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung, längs deren die Hessiana von der gemeinen Polarfläche von E berührt wird (158), zwei entsprechende Curven, weil die zweite Curve der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen der Puncte von E ist.

Man kann auch sehr leicht die Curve bestimmen, welche der Durchschnittscurve der Hessiana mit einer beliebigen Fläche S_μ der μ-ten Ordnung

entspricht. Es sei K die einhüllende Fläche der Polarebenen der Puncte von S_μ, eine Fläche, die auch der Ort der Puncte ist, deren erste Polarflächen S_μ berühren (94). Ist σ ein gemeinschaftlicher Punct von S_μ und der Hessiana, so berührt die Polarebene von σ gleichzeitig K und die Steineriana im entsprechenden Puncte σ' (165). Nun berührt die erste Polarfläche von σ', da sie in σ einen Doppelpunct besitzt, S_μ in diesem Puncte; σ' gehört also auch K an, und folglich haben die Steineriana und die Fläche K einen Berührungspunct in σ. *K berührt daher die Steineriana längs der Curve, welche der Durchschnittscurve der Hessiana mit S_μ entspricht* [1]).

Die Puncte, in denen diese Berührungscurve von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, entsprechen den gemeinschaftlichen Puncten von S_μ und einer Curve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung. *Die Ordnung der Berührungscurve ist daher* $6\mu(\nu-2)^2$.

Man kann auch nach der Ordnung von K fragen. Die Puncte, in denen diese Fläche von einer beliebigen Geraden getroffen wird, sind die Pole ebensovieler Flächen eines Büschels, welche S_μ berühren; folglich (137) *ist K von der Ordnung*

$$\mu[3(\nu-2)^2+(\mu-1)^2+2(\nu-2)(\mu-1)] \ .$$

Ist $\mu=1$, so ist K, Ort eines Punctes, dessen erste Polarfläche eine gegebene Ebene berührt, von der Ordnung $3(\nu-2)^2$, wie man schon früher (94) gefunden hat.

169. Wir haben oben (69) gesehen, dass die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes der Fundamentalfläche ein Kegel ist. Umgekehrt ist es klar, dass jeder Punct der Fundamentalfläche, dessen Quadripolarfläche ein Kegel ist, der aber seinen Scheitel nicht im Pole haben darf, da man sonst einen Doppelpunct hätte, ein parabolischer Punct sein muss. *Folglich ist der Ort der parabolischen Puncte diejenige Raumcurve $4\nu(\nu-2)$-ter Ordnung, welche den Durchschnitt der Fundamentalfläche mit der Hessiana darstellt.* Diese Curve theilt natürlich die Fläche F_ν in zwei Regionen, deren eine die hyperbolischen Puncte, die andern die elliptischen Puncte enthält. (25. *Anmerkung* [2])). Das heisst, die Tangentialebene eines Punctes der Fundamentalfläche F_ν schneidet diese in einer Curve, für die der Berührungspunct ein Knotenpunct oder ein isolierter Punct ist, jenachdem derselbe der ersten oder zweiten Region angehört.

170. Eine Tangentialebene von F_ν ist stationär, wenn der Berührungspunct parabolisch ist. Nun trifft die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes des Raumes die parabolische Curve in $4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncten; die Zahl drückt

---

[1]) Das nämliche Raisonnement zeigt, dass auch die developpable Polarfläche einer Geraden die Steineriana in den entsprechenden Puncten der Durchschnittspuncte der Hessiana mit dieser Geraden berührt. Dieselbe Eigenschaft gilt für eine beliebige Curve.

also aus, wieviel stationäre Ebenen durch den beliebigen Punct gehen, wie man schon anderweitig gefunden (67).

171. Man setze jetzt voraus, die Fundamentalfläche F_ν enthalte eine Gerade a. Eine beliebig durch a gelegte Ebene schneidet F_ν in einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung; und eine Fläche $(\nu-1)$-ter Ordnung, die man ebenfalls beliebig durch diese Curve legt, schneidet F_ν nochmals in einer Raumcurve c der $(\nu-1)^2$-ten Ordnung, die man als Basis eines Büschels $(\nu-1)$-ter Ordnung nehmen kann. Eine beliebige Fläche S dieses Büschels schneidet F_ν in einer ebenen Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung, deren Ebene E durch die Gerade a geht, denn die letztere Curve muss die $\nu-1$ Durchschnittspuncte von S und a enthalten. Man kann also F_ν mit Hilfe zweier projectivischer Büschel erzeugen, eins das Büschel der Ebenen E durch a, das andere der Flächen S durch c.

Jede Ebene E berührt F_ν in $\nu-1$ Puncten, nämlich in den Puncten, in denen a die E entsprechende Fläche S trifft, denn diese Puncte sind für die Schnittcurve von F_ν und E Doppelpuncte. Man kann die Zahl der Ebene E verlangen, welche F_ν ausserhalb der Geraden a berühren. Eine Ebene E beliebig durch a gelegt berührt $3(\nu-2)^2$ Flächen S', denn diese bilden ein Büschel, denen ebensoviel Ebenen E' entsprechen. Umgekehrt ist die einer beliebigen Ebene E' entsprechende Fläche S' von der Classe $(\nu-1)(\nu-2)^2$ und wird also von ebensovielen Geraden E berührt. Es geschieht also $3(\nu-2)^2+(\nu-1)(\nu-2)^2$ mal, das zwei Ebenen E und E' zusammenfallen; das heisst, *es gibt* $(\nu+2)(\nu-2)^2$ *Ebenen* E, *deren jede* F_ν *in einer Curve* $(\nu-1)$-*ter Ordnung mit einem Doppelpuncte schneidet.*

In dem Büschel der Flächen S gibt es $2(\nu-2)$, welche a berühren. Die Berührungspuncte sind die Doppelpuncte der Involution $(\nu-1)$-ten Gerades, die durch die Flächen S auf a erzeugt wird, oder, was dasselbe ist, durch die Curven $(\nu-1)$-ter Ordnung, die den Durchschnitt von F_ν mit den Ebenen E bilden. Diese $2(\nu-2)$ Puncte sind die einzigen parabolischen Puncte, die sich auf a befinden; denn, ist ein Punct von a parabolisch, so muss die Tangentialebene E von F_ν in diesem Puncte letztere Fläche längs einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung schneiden, die in obigem Puncte durch a berührt wird. Da aber andererseits die Hessiana von der $4(\nu-2)$-ten Ordnung ist, so müssen die $2(\nu-2)$ genannten Puncte die $4(\nu-2)$ Durchschnittspuncte dieser Fläche mit der Geraden a repräsentieren. Daher der Satz:

Jede Gerade, die auf der Fundamentalfläche liegt, berührt die Hessiana in $2(\nu-2)$ *Puncten und folglich auch die parabolische Curve.*

172. Was ist die Ordnung des Ortes der Paare osculierender Geraden der Fundamentalfläche in den Puncten der Durchschnittscurve dieser Fläche mit einer andern Fläche S_μ der μ-ten Ordnung? Erinnern wir uns, dass die Osculierenden in einem Puncte von F_ν den Durchschnitt der Polarebene mit der Quadripolarfläche dieses Punctes bilden (69). Es sei daher g eine

beliebige Gerade; x ein beliebiger Punct dieser Geraden. Wenn eine Quadripolarfläche durch x geht, so ist der Ort des Poles die zweite Polarfläche von x, welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten schneidet; und die Polarebenen dieser Puncte treffen g in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten x'. Umgekehrt haben die Polarebenen, die durch einen beliebigen Punct x' von g gehen, ihre Pole auf der ersten Polarfläche von x', welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-1)$ Puncten treffen, deren Quadripolarflächen $2\mu\nu(\nu-1)$ Puncte x auf g bestimmen. Es gibt also auf g

$$\mu\nu(\nu-2)+2\mu\nu(\nu-1)=\mu\nu(3\nu-4)$$

Puncte, in denen ein Punct x mit einem Puncte x' zusammenfällt. Man erhält so den Satz:

Der Ort der Osculierenden der Fundamentalfläche in den Puncten der Durchschnittscurve derselben mit einer andern Fläche S_μ μ-ter Ordnung ist eine Fläche der $\mu\nu(3\nu-4)$-ten Ordnung.

Für diese im Allgemeinen windschiefe Fläche ist die Curve $(\mu\nu)$ doppelt, denn jeder Punct derselben ist der Durchschnitt zweier gradliniger Generatrixen. Ist $\mu=1$, so schneidet der fragliche Ort die Ebene S in dem Schnitte der Fläche F_ν durch S und in den $3\nu(\nu-2)$ stationären Tangenten dieser ebenen Curve.

Ist $\mu=4(\nu-2)$, so geht die Ordnung des Ortes in $4\nu(\nu-2)(3\nu-4)$ über; ist aber S_μ die Hessiana, so darf man nur die Hälfte dieser Zahl nehmen, da in diesem Falle die Curve $(\mu\nu)$ die parabolische Curve ist (169), und folglich in jedem ihrer Puncte die beiden Osculierenden zusammenfallen.

In demselben Falle ist der Ort eine Developpable, da die Tangentialebene eines parabolischen Punctes von F_ν stationär ist, das heisst, da sie als eine Bitangentialebene betrachtet werden muss, deren beide Berührungspuncte unendlich nahe sind, und da zwei stationäre Ebenen, die unmittelbar auf einander folgen, durch die Osculierende gehen (31). Daraus folgt: *Der Ort der Osculierenden längs der parabolischen Curve fällt mit der einhüllenden Fläche der stationären Ebenen zusammen* [1]), deren Classe wir schon früher bestimmt haben (67).

173. Man verlangt *die der Fundamentalfläche längs der Durchschnittscurve ν-ter Ordnung mit einer Ebene E umgeschriebene Developpable.*

Die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes x des Raumes trifft die Curve (ν) in $\nu(\nu-1)$ Puncten, also ist *die Classe der Developpablen* gleich $\nu(\nu-1)$.

Wenn zwei dieser $\nu(\nu-1)$ Puncte zusammenfallen, so gehört der Punct

---

1) *Diese Developpable ist der Steineriana längs der Curve von der Ordnung $6\nu(\nu-2)^2$ umgeschrieben, welche der parabolischen Curve entspricht* (168). In der That, ist o ein parabolischer Punct, so berührt die — hier stationäre — Polarebene von o in diesem Puncte die Fundamentalfläche und im correspondierenden Puncte die Steineriana (165).

$\mathfrak{x}$ der Developpablen an. Wieviel solcher Puncte gibt es nun auf einer beliebigen Geraden g? Die ersten Polarflächen der Puncte von g bilden ein Büschel und schneiden also die Ebene E in einem Curvenbüschel $(\nu-1)$-ter Ordnung in dem es $\nu(3\nu-5)$ Curven gibt [1]), welche die Curve (ν) berühren, sobald man diese ohne vielfache Puncte voraussetzt. Hat diese Curve δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen (das heisst, hat E δ gewöhnliche und $\varkappa$ stationäre Berührungen mit F_ν), so geht obige Zahl über in $\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)$ [2]). *Diese Zahl drückt daher die Ordnung unsrer Developpablen aus.*

Gibt es unter den $\nu(\nu-1)$ Durchschnittspuncten der ersten Polarfläche von $\mathfrak{x}$ mit der Curve (ν) drei zusammenfallende Puncte, so liegt $\mathfrak{x}$ auf der Cuspidalcurve der Developpablen; hat dagegen die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$ zwei Berührungen mit der Curve (ν), so ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Doppelcurve der Developpablen. Man kann daher nach der Zahl derartiger Puncte $\mathfrak{x}$ auf einer beliebigen Ebene fragen. Die ersten Polarflächen der Puncte dieser Ebene schneiden E in einem Curvennetze $(\nu-1)$-ter Ordnung, in dem es

$$6\nu(\nu-2)-(6\delta+8\varkappa)$$

Curven gibt, welche die Curve (ν) osculieren, und

$$\tfrac{1}{2}[\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)]^2-\nu(11\nu-21)+10\delta+\frac{27}{2}\varkappa \quad ^{3)}$$

Curven, welche die nämliche Curve in zwei getrennten Puncten berühren. *Diese Zahlen drücken die Ordnung der Cuspidalcurve und die Ordnung der Knotencurve der Developpablen aus,* um die es sich handelt.

174. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν durch die Scheitel eines Tetraeders geht, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Puncte des Raumes; c die Curve $(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die der Durchschnitt der zweiten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist, und folglich Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche durch diese Puncte gehen; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ die Puncte, in denen S die in Bezug auf S reciproke Gerade von $\mathfrak{ab}$ schneidet. Die Quadripolarflächen die durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehen, bilden eine Reihe, von der $(\nu-2)^3$ durch einen dritten beliebig gegebenen Punct gehen. Es wird daher auch $(\nu-2)^3$ Quadriflächen dieser nämlichen Reihe geben, welche das Segment $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ harmonisch theilen, das heisst, die Curve c trifft den gesuchten Ort in $(\nu-2)^3$ Puncten. *Folglich ist dieser Ort eine Fläche von der Ordnung*

$$(\nu-2)^3:(\nu-2)^2=\nu-2\ .$$

Jeder Punct, der diesem Orte und der Hessiana gemein ist, ist dann der Pol eines Quadripolarkegels, der einem S conjugierten Trieder umgeschrieben ist. Folglich hat man (168): *Der Ort der Scheitel der Quadrikegel, welche*

1) *Einleitung*, Nr. 87.

2) *Einleitung*, Nr. 103.

3) *Einleitung*, Nr. 103.

den der gegebenen Quadrifläche conjugierten Triedern umgeschrieben sind, ist eine Raumcurve der $6(\nu-2)^3$*-ten Ordnung.*

175. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche einem Tetraeder eingeschrieben ist, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Es seien A, B zwei beliebige Ebenen; c die Curve $9(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die den Durchschnitt der gemeinen Polarflächen der Ebenen A, B darstellt, und somit Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche beide obigen Ebenen berühren; A', B' die Tangentialebenen von S, welche durch die in Bezug auf S reciproke Gerade von AB gelegt sind. Die Quadripolarflächen, die A und B berühren, bilden eine Reihe, von der je $27(\nu-2)^3$ eine beliebige dritte Ebene berühren; es gibt daher auch $27(\nu-2)^3$ solcher Flächen, welche zu den Ebenen A', B' conjugiert sind. Die Curve c enthält also $27(\nu-2)^3$ Puncte des gesuchten Ortes, und dieser ist daher *eine Fläche von der Ordnung:*

$$27(\nu-2)^3 : 9(\nu-2)^2 = 3(\nu-2)\,.$$

Liegt ein Scheitel $\mathfrak{x}$ des zu S conjugierten Tetraeders auf S selbst, so ist seine Gegenfläche die Tangentialebene dieser Fläche in $\mathfrak{x}$, und von den drei übrigen Seitenflächen fällt eine mit derselben Tangentialebene zusammen, und die beiden übrigen sind zwei beliebige Ebenen, die man durch zwei conjugierte Tangenten von S in $\mathfrak{x}$ gezogen hat. Ein solches Tetraeder kann man daher stets als einem Quadrikegel vom Scheitel $\mathfrak{x}$ umgeschrieben ansehen. Ist folglich $\mathfrak{x}$ ein gemeinschaftlicher Punct von S und der Hessiana, so gehört der Pol des Polarkegels vom Scheitel $\mathfrak{x}$ dem Orte an, um den es sich handelt; das heisst: *dieser Ort schneidet die Hessiana in der Curve, welche der Durchschnittscurve der Steineriana mit S entspricht.*

Wenn S das System zweier Ebenen ist, so wird der betrachtete Ort offenbar die gemischte Polarfläche dieser Ebenen (158).

176. Wir suchen den *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf die Fundamentalfläche* F_ν *durch die Scheitel eines Tetraeders geht, welches der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist.*

Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g. Der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, die den Tetraedern umgeschrieben sind, welche der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen conjugiert sind, schneidet die Gerade g in $(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (172). Soll umgekehrt eine Quadripolarfläche in Bezug auf die Hessiana einem Tetraeder conjugiert sein, das der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}'$ in Bezug auf F_ν eingeschrieben ist, (das heisst, wenn die erste Quadrifläche einem der zweiten conjugierten Tetraeder eingeschrieben sein soll), so ist der Ort (175) eine Fläche von der Ordnung $3[4(\nu-2)-2]$, welche g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Diese Gerade enthält also $\nu-2+12(\nu-2)-6$ zusammenfallenden Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, oder mit andern Worten, *der gesuchte Ort ist eine Fläche der* $(13\nu-32)$*-sten Ordnung.*

Betrachtet man die gemeinschaftlichen Puncte dieser Fläche und der Hessiana, so können wir weiter behaupten: Der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Polarkegel einem der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes conjugierten Trieder umgeschrieben ist, diese Fläche nach der Hessiana genommen, ist eine Raumcurve von der Ordnung $4(\nu-2)(13\nu-32)$.

177. In ähnlicher Weise findet man den Satz: *Der Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche nach F_ν einem Tetraeder eingeschrieben ist, das der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, ist eine Fläche T der Ordnung*

$$4(\nu-2)-2+3(\nu-2)=7\nu-16 \; .$$

Diese Fläche schneidet die Hessiana in einer Curve, von der jeder Punct in Bezug auf F_ν der Pol eines Quadrikegels ist, dessen Scheitel auf der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana liegt. *Folglich ist der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Quadripolarfläche nach der Hessiana genommen, durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht, eine Raumcurve der $4(\nu-2)(7\nu-16)$-ten Ordnung, die auf der Fläche T liegt.* Diese Curve geht zweimal durch die $10(\nu-2)^3$ Doppelpuncte der Hessiana, denn jeder Punct derselben hat eine unbegrenzte Zahl entsprechender Puncte in gerader Linie (167), welche die Quadripolarfläche dieses Punctes nach der Hessiana genommen zweimal schneidet.

178. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt?* Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g; X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana. Die Quadripolarflächen nach F_ν, welche die Ebene X berühren, haben ihre Pole auf der gemeinen Polarfläche dieser Ebene (158), welche g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ schneidet. Soll umgekehrt eine Polarfläche durch $\mathfrak{x}'$ gehen, so ist die entsprechende Ebene Tangentialebene der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}'$. Nun liegen aber die Pole — nach der Hessiana genommen — der Tangentialebenen einer Quadrifläche auf einer Fläche der $2[4(\nu-2)-1]$-ten Ordnung (96), die g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Die Gerade g enthält also

$$3(\nu-2)+8(\nu-2)-2=11\nu-24$$

zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, und *der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{T}$ der $(11\nu-24)$-sten Ordnung.*

Ein Punct $\mathfrak{x}$ der Fläche T (177) ist der Scheitel eines der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$ nach F_ν genommen umgeschriebenen Tetraeders, das zugleich der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, wenn nur der Punct $\mathfrak{x}$ auf der reciproken Polarfläche der ersten Quadrifläche in Bezug auf die zweite liegt, in welchem Falle die Polarebene von $\mathfrak{x}$, nach der Hessiana genommen, die Quadripolarfläche desselben Punctes für F_ν berührt. Das heisst, unter dieser Voraussetzung ist $\mathfrak{x}$ auch ein Punct

von $\mathfrak{T}$. *Der Ort eines Punctes also, der ein Scheitel eines Tetraeders ist, das bezüglich den Quadripolarflächen desselben Punctes nach F_ν und nach der Hessiana genommen umgeschrieben und conjugiert ist, ist eine Raumcurve von der Ordnung* $(11\nu-24)(7\nu-16)$, *die den Durchschnitt der Flächen $\mathfrak{T}$ und T bildet.*

179. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana einer gegebenen Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche desselben Punctes conjugiert ist, letztere Fläche nach F_ν genommen?* Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct einer Geraden g, und X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so schneidet der Ort der Pole der Quadripolarflächen nach F_ν, für welche E_λ und X zwei conjugierte Ebenen sind, g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (152); umgekehrt, ist $\mathfrak{y}$ der Pol der Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$, diese Fläche nach der Fundamentalfläche genommen, so schneidet die erste Polarfläche von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf die Hessiana g in $4(\nu-2)-1$ Puncten $\mathfrak{x}$. Die Gerade g enthält also $3(\nu-2)+4(\nu-2)-1$ zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, das heisst *der gesuchte Ort ist eine Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ von der Ordnung* $7\nu-15$.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Hessiana, für dessen Polarkegel der Scheitel auf der gegebenen Ebene liegt oder auf der Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so gehört dieser Punct $\mathfrak{x}$ dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ an, denn, da die durch den Scheitel gehende Ebene eine unbegrenzte Zahl Pole hat — auf der Polargeraden der Ebene in Bezug auf den Kegel —, so ist sie für jede beliebige andere Ebene conjugiert. Der erste Fall hat statt für die Pole der Polarkegel, deren Scheitel auf der Durchschnittscurve der Steineriana mit der Ebene E_λ liegen; folglich geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die Raumcurve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung, welche dem ebenen Schnitte E_λ der Steineriana entspricht [1]).

Die zweite Voraussetzung tritt dagegen ein, wenn die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{x}$ durch den Scheitel $\mathfrak{x}'$ des Polarkegels geht. In diesem Falle gehört der Punct $\mathfrak{x}$ offenbar auch der Fläche $\mathfrak{T}$ an (178). Was also auch die Ebene E_λ ist, stets geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die gemeinschaftliche Curve von $\mathfrak{T}$ und der Hessiana [2]). Diese Curve ist von der Ordnung

$$4(\nu-2)(7\nu-15)-6(\nu-2)^2=2(\nu-2)(11\nu-24)$$

und diese Zahl ist die Hälfte des Productes aus den Ordnungszahlen der

---

[1]) Der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ und die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ schneiden sich noch in einer andern Raumcurve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, die offenbar der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν die Ebene E_λ berührt, und dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den Berührungspunct geht.

[2]) Jeder gemeinschaftliche Punct der Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana gehört auch $\mathfrak{S}$ an, denn sobald die Polarebene nach der Hessiana den Polarkegel berühren muss, so geht sie durch den Scheitel desselben. Im Falle $\nu=3$ ist die Durchschnittscurve zwischen $\mathfrak{T}$ und der Hessiana die der parabolischen Curve entsprechende.

Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana, *folglich berühren sich diese beiden Flächen überall, wo sie sich treffen, und zwar längs einer Raumcurve der* $2(\nu-2)(11\nu-24)$-*sten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht.*

Alle diese Flächen $\mathfrak{S}$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung bilden, da sie durch die nämliche Curve $2(\nu-2)(11\nu-24)$-ten Ordnung gehen, ein lineares System. In der That, sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei beliebig gegebene Puncte des Raumes; A, B, C die Polarebenen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in Bezug auf die Hessiana; und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die Pole der Ebenen A, B, C in Bezug auf die Quadripolarflächen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nach F_ν genommen, so bestimmt die Ebene $E \equiv \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ die einzige Fläche $\mathfrak{S}$, die durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ geht.

180. Man sucht den *Ort eines Punctes, für den die gemeinsame Gerade einer gegebenen Ebene E_λ und der Polarebene des Punctes in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes nach der Fundamentalfläche genommen berührt.* Um die Aufgabe zu lösen, nehmen wir auf einer beliebigen Geraden g einen Punct $\mathfrak{x}$ an; dann schneidet die Polarebene von $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen E_λ in einer gewissen Geraden, und der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche diese Gerade berühren, schneidet g in $2(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (159). Umgekehrt wird die Quadripolarfläche für F_ν eines Punctes $\mathfrak{x}$ von der Ebene E_λ in einem Kegelschnitte getroffen, der $2(4\nu-9)$ gemeinschaftliche Tangenten mit demjenigen Schnitte hat, den die nämliche Ebene in der einhüllenden Fläche $[4(\nu-2)-1]$-ter Classe (93) der Polarbenen der Puncte von g nach der Hessiana genommen macht. *Der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{X}_\lambda$ von der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11) \;.$$

Die Fläche $\mathfrak{T}$ und die Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ in Bezug auf die Ebene E_λ (179) haben eine Curve der Ordnung $2(\nu-2)(11\nu-24)$ gemein, und schneiden sich also in einer andern Raumcurve von der Ordnung

$$(7\nu-15)(11\nu-24)-2(\nu-2)(11\nu-24)=(5\nu-11)(11\nu-24) \;.$$

Jeder Punct $\mathfrak{x}$ dieser Curve ist so beschaffen, dass seine Polarebene für die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt (178), und dass genannte Ebene der Ebene E_λ in Bezug auf die nämliche Quadripolarfläche conjugiert ist; folglich geht E_λ durch den Berührungspunct der Polarebene mit der Quadrifläche, und also ist der Durchschnitt von E_λ mit der Polarebene eine Tangente der Quadrifläche. Es folgt daraus, dass $\mathfrak{x}$ ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_\lambda$ ist. Dasselbe Raisonnement zeigt ebenfalls, dass jeder Punct der Curve $3(\nu-2)(5\nu-11)$-ten Ordnung, welche der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ und dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ gleichzeitig angehört, auch auf $\mathfrak{X}_\lambda$ liegt; und also schneidet $\mathfrak{X}_\lambda$ die $\mathfrak{S}_\lambda$ in einer Curve der $(5\nu-11)(11\nu-24)$-ten Ordnung, die auf $\mathfrak{T}$ liegt, und in einer andern Curve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, welche auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ liegt.

Nun sieht man aber leicht nach den Definitionen des betreffenden Ortes, dass jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und $\mathfrak{T}$, und ebenso jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und der Polarfläche von E_λ nothwendigerweise auch auf $\mathfrak{S}_\lambda$ liegt, *und folglich wird die Fläche* $\mathfrak{X}_\lambda$ *durch die Fläche* $\mathfrak{T}$ *längs der Raumcurve* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-ster Ordnung berührt, und von der gemeinen Polarfläche der Ebene* E_λ *längs der Raumcurve* $3(\nu-2)(5\nu-11)$*-ter Ordnung; beide Berührungscurven liegen gleichzeitig auf der Fläche* $\mathfrak{S}_\lambda$ [1]).

181. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf* F_ν *und zwei gegebenen Ebenen* E_λ, E_λ' *in einem Kegelschnitt und zwei zu demselben conjugierten Geraden schneidet.* Es sei x ein Punct einer beliebigen Geraden g; X die Polarebene von x in Bezug auf die Hessiana, dann ist der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche die Ebene E_λ in Kegelschnitten schneiden, die zu den Geraden XE_λ, XE_λ' conjugiert sind, die gemischte Polarfläche dieser Geraden (159), die g in $2(\nu-2)$ Puncten x' schneidet. Umgekehrt sei Q die Quadripolarfläche eines Punctes x' in Bezug auf F_ν, dann weiss man, dass die Ebenen, welche die Quadrifläche Q und die gegebenen Ebenen E_λ, E_λ' längs eines Kegelschnittes und zwei conjugierter Geraden schneiden, eine andere Quadrifläche umhüllen. Diese Fläche und die Einhüllende der Polarebenen der Puncte von g in Bezug auf die Hessiana haben $2[4(\nu-2)-1]$ gemeinschaftliche Tangentialebenen, denen ebensoviele Pole x auf g entsprechen. *Der verlangte Ort ist also eine Fläche* $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$ *der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11)\ .$$

Jeder gemeinsame Punct x von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}_\lambda$ ist so beschaffen (180), dass seine Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche von x nach F_ν genommen und die Ebene E_λ in drei durch ein und denselben Punct gehenden Geraden schneidet. Die letzte von diesen Geraden hat eine unbegrenzte Anzahl Pole in gerader Linie in Bezug auf den Kegelschnitt, der durch die beiden ersten Geraden gebildet wird. Daraus folgt, dass die letztere Gerade in Bezug auf genannten Kegelschnitt jeder Geraden conjugiert ist, die in der erwähnten Polarebene von x gezogen werden kann; also ist x auch ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$. Das heisst aber: *Dieser Ort geht durch die beiden Curven der* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-sten Ordnung, in denen sich die Flächen* $\mathfrak{T}$ *und bezüglich* $\mathfrak{X}_\lambda$ *und* $\mathfrak{X}_\lambda'$ *berühren.*

182. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf* F_ν *und die Hessiana, und dessen Quadrioplarfläche in Bezug auf* F_ν

---

1) Es folgt hieraus, dass der Verein der Hessiana, von $\mathfrak{X}_\lambda$ und einer beliebigen Fläche $\mathfrak{P}$ der $(4\nu-9)$-ten Ordnung mittelst zweier projectivischer Büschel erzeugt werden kann, nämlich $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(11\nu-24)$-ten Ordnung und $(\mathfrak{S}_\lambda, S_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung. Hierin bezeichnet S_λ die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ.

einen Punct auf einer gegebenen Ebene E gemein haben. Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punct einer beliebigen Geraden g, dann trifft die den beiden Polarebenen von $\mathfrak{x}$ gemeinschaftliche Gerade die Ebene E in einem Puncte $\mathfrak{y}$, und die Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche durch $\mathfrak{y}$ gehen, liegen auf der zweiten Polarfläche dieses Punctes. Diese letzte Fläche schneidet g in $\nu-2$ Puncten $\mathfrak{x}'$. Umgekehrt schneidet die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$ nach F_ν genommen die Ebene E in einem gewissen Kegelschnitte k; es gibt nun aber auf g eine Zahl von $10(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}$, von denen jeder die Eigenschaft besitzt, dass seine Polarebenen in Bezug auf F_ν und die Hessiana sich auf k schneiden [1], der gesuchte Ort ist also eine Fläche $11(\nu-2)$-ter Ordnung.

Was auch die Ebene E ist, immer geht diese Fläche durch die $2(\nu-2)$ Puncte $\mathfrak{a}$, in denen die Hessiana von einer Geraden a berührt wird, die auf der Fundamentalfläche liegt (171); denn die Polarebenen und die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ gehen gleichzeitig durch die Gerade a und haben daher mit jeder gegebenen Ebene einen Punct gemein.

---

[1] Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ einer Geraden r kann man zwei erste Polarflächen in Bezug auf F_ν legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}$ sind. Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf die Hessiana treffen ferner r in $2(4\nu-9)$ Puncten $\mathfrak{i}'$. Umgekehrt kann man durch einen Punct $\mathfrak{i}'$ zwei erste Polarflächen in Bezug auf die Hessiana legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}'$ in Bezug auf die Hessiana sind Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf F_ν schneiden r in $2(\nu-1)$ Puncten. $\mathfrak{i}'$. Auf r fallen also

$$2(4\nu-9)+2(\nu-1)=10(\nu-2)$$

mal zwei Puncte $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}'$ zusammen, w. z. b. w.

DRITTER THEIL.

CAPITEL I.

ANWENDUNG DER ALLGEMEINEN THEORIE AUF EINE FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

183. Die Fundamentalfläche sei jetzt eine Fläche F_3 der dritten Ordnung, die wir als ganz allgemein, das heisst ohne vielfache Puncte und Linien voraussetzen. Die im zweiten Theile bewiesenen Sätze enthalten schon eine grosse Zahl von Eigenschaften der cubischen Flächen, aber wir halten uns nicht dabei auf, die speciellen Sätze auszusprechen; wir haben nur im Sinne dasjenige zu entwickeln, was es für die Flächen der dritten Ordnung Specielles oder Charakteristisches gibt.

Da im gegenwärtigen Falle die erste Polarfläche zugleich die Quadripolarfläche ist, *so fallen die Hessiana und Steineriana in eine und dieselbe Fläche vierter Ordnung und sechszehnter Classe zusammen* (163, 165). *Die Puncte dieser Fläche entsprechen sich zu zwei und zwei. Sind* $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ *zwei entsprechende Puncte, so ist jeder der Scheitel eines Polarkegels, dessen Pol der andere Punct ist, und in jedem dieser Puncte hat die Hessiana die Polarebene des andern Punctes zur Tangentialebene.* Dieselben Puncte sind für jede Quadripolarfläche conjugiert (139).

184. Die zweite gemischte Polarfläche zweier Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ wird eine Ebene, und zwar der Ort eines solchen Punctes, dass die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in Bezug auf seine Quadripolarfläche conjugiert sind (160). Denkt man sich einen der Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und ihre gemischte Polarebene gegeben, so findet man den andern Punct auf folgende Weise: Die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Ebene bilden ein Netz, und die Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf diese Flächen gehen sämmtlich durch denselben Punct $\mathfrak{b}$, welcher der gesuchte Punct ist.

Denkt man $\mathfrak{a}$ fest, und lässt die gemischte Polarebene um eine gegebene Gerade g rotieren, so beschreibt der Punct $\mathfrak{b}$ eine andere Gerade g', Durch-

schnitt der Polarebenen von 𝔞 in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g. Nun schneidet g die Hessiana in vier Puncten, und *folglich umhüllen die Polarebenen eines gegebenen Punctes* 𝔞 *in Bezug auf die Polarkegel eine Fläche vierter Classe.* Ist 𝔞 ein Punct der Hessiana, so geht die gemischte Polarebene immer durch 𝔞′ (Scheitel des Polarkegels von 𝔞); in diesem Falle also umhüllen die Polarebenen von 𝔞 in Bezug auf die Polarkegel einen Kegel vierter Klasse.

Ist 𝔞 beliebig im Raume gegeben, und 𝔟 bewegt sich in einer festen Ebene E, so geht die gemischte Polarebene immer durch einen festen Punct 𝔢, den Pol von E in Bezug auf die Quadripolarfläche von 𝔞. Beschreibt also 𝔟 die Durchschnittscurve der Hessiana mit der Ebene E, so umhüllt die gemischte Polarebene einen Kegel vom Scheitel 𝔢 vierter Classe, der derjenigen Fläche umschrieben ist, die man erhält, wenn 𝔟 die Hessiana durchläuft; das heisst: *die Polarebenen eines festen Punctes in Bezug auf alle Polarkegel, deren Scheitel auf derselben Ebene liegen, umhüllen einen Kegel vierter Classe.*

185. Was wir im Allgemeinen *gemischte Polarfläche* zweier Geraden g, g' genannt haben, wird hier eine Quadrifläche (ein Hyperboloid), und da im gegenwärtigen Falle die Polarcurve einer Geraden in Bezug auf eine erste Polarfläche (86) die reciproke Gerade der gegebenen Geraden in Bezug auf eine Quadripolarfläche ist, so ergibt sich, *dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g' der Ort der reciproken Geraden für jede der gegebenen Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern ist,* oder auch der Ort eines Punctes, für welchen die Reciproke einer der beiden Geraden in Bezug auf die Quadripolarfläche dieses Punctes die andere gegebene Gerade schneidet.

Ist 𝔦 ein variabler Punct auf g, und 𝔞, 𝔟 zwei feste Puncte von g', so ist das Polarhyperboloid durch zwei projectivische Büschel erzeugt (159), in denen die gemischten Polarebenen der Puncte 𝔞, 𝔦 den gemischten Polarebenen der Puncte 𝔟, 𝔦 entsprechen. Die beiden Puncte 𝔞, 𝔟 können natürlich durch zwei andere beliebige Puncte von g' ersetzt werden, und *das Polarhyperboloid zweier Geraden ist also auch die einhüllende Fläche der gemischten Polarebene zweier auf den gegebenen Geraden variabler Puncte, eines auf jeder Geraden.*

186. Wenn g, g' zusammenfallen, erhalten wir eine gemeine Polarfläche einer Geraden g, die *ein Kegel zweiter Ordnung* ist (93, 159), dessen Scheitel der Pol der Quadripolarfläche ist, welche durch g geht, und dessen Generatrixen die zu g reciproken Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g sind. *Dieser Kegel ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte von g,* und daher auch der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen, welche g berühren. Wir geben dieser Fläche den Namen *Polarkegel der Geraden g*, den man aber nicht mit dem Polarkegel eines Punctes der Hessiana verwechseln darf.

187. *Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen E, E'* ist von der dritten Ordnung (158), und *ist der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern Ebene oder auch,* was auf dasselbe hinausläuft, *der Ort der Pole einer Quadripolarfläche, in Bezug auf welche die Ebenen E, E' conjugiert sind.*

Der Ort der Pole einer Ebene E in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte einer Geraden g (128) *ist eine cubische Raumcurve* (Raumcurve dritter Ordnung); sie liegt auf dem Polarhyperboloid von g und einer andern beliebigen auf E befindlichen Geraden und ebenfalls auf der gemischten Polarfläche von E und einer andern beliebigen Ebene, die durch g geht (162). Daraus folgt, dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g', wenn g fest ist und g' variabel in einer Ebene E, ein Büschel von Flächen erzeugt, die durch eine feste cubische Raumcurve gehen.

188. Fallen die Ebenen E, E' zusammen, so erhält man *die gemeine Polarfläche einer Ebene E,* welche die einhüllende Fläche der Polarkegel der Geraden sind, die in der gegebenen Ebene liegen (159), und gleichzeitig der Ort der Pole der Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte derselben Ebene (158). Diese zweite Definition kommt darauf zurück, dass die genannte Fläche der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche die gegebene Ebene berührt. Folglich fällt (94, 162) dieselbe Fläche mit *der Enveloppe der Polarebenen der Puncte der gegebenen Ebene* zusammen. Sie ist von der dritten Ordnung, von der vierten Classe und besitzt vier Doppelpuncte, die auf den Polarkegeln und den Polarhyperboloiden aller Geraden der gegebenen Ebene liegen [1]).

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punct dieser Fläche. Die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ berührt dann die Ebene E und schneidet folglich diese Ebene in zwei Geraden, die sich im Berührungspuncte $\mathfrak{a}'$ kreuzen. Die Polarebenen der Puncte dieser Geraden müssen durch $\mathfrak{a}$ gehen und anderswo die Fläche berühren; *ein beliebiger Punct der Fläche ist also der Scheitel zweier der Fläche umgeschriebener Quadrikegel* (es sind dies die Polarkegel zweier in $\mathfrak{a}'$ sich kreuzender Geraden). Die Polarebene von $\mathfrak{a}'$ berührt die Fläche in $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a}$ einer der Doppelpuncte der Fläche, so müssen die beiden Berührungskegel zusammenfallen; folglich schneidet die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ die Ebene E in zwei zusammenfallenden Geraden. *Unter den Quadripolarflächen, die eine Ebene E berühren, gibt es also vier Kegel; ihre Pole,* die auch der Hessiana angehören, *sind die Doppelpuncte der gemeinen Polarfläche der Ebene.*

Diese Fläche ist die Reciproke der *Römischen Fläche* STEINERS [2]).

---

1) Liegt ein Punct im Unendlichen, so ist seine Polarebene eine Diametralebene der Fundamentalfläche. *Die Enveloppe der Diametralebenen ist also die gemeine Polarfläche der unendlich entfernten Ebene.* Diese Fläche ist der der F_ν längs des Schnittes im Unendlichen umgeschriebenen Developpablen eingeschrieben (100).

2) Man sehe die Monatsberichte der K. Akademie zu Berlin (Juli und November 1863) und Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 63, S. 315.

189. Ist eine Ebene E fest und die andere Ebene E' um eine Gerade g variabel, so bilden die gemischten Polarflächen der Ebenen E, E' ein Büschel. In der That, muss eine solche Fläche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{x}$ gehen, so geht die Ebene E' durch den Pol von E in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$. Die Basis des Büschels ist aus einer Raumcurve sechster Ordnung (Ort der Doppelpuncte der Quadripolarflächen der Puncte der festen Ebene) und einer cubischen Raumcurve (Ort der Pole der festen Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Geraden) zusammengesetzt (158, 187).

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen E, E' und ihre gemeinen Polarflächen werden gleichzeitig (164) durch den Polarkegel der Geraden EE' berührt und zwar in vier Puncten der Hessiana (entsprechend den Durchschnittspuncten dieser Fläche mit der Geraden EE'), und gehen durch die zehn Doppelpuncte der Hessiana (158). Diese Puncte sind $4.4 + 10$ Durchschnittspuncten äquivalent, und folglich haben die drei genannten Flächen, die sämmtlich von der dritten Ordnung sind, nur noch e i n e n andern Punct gemein; es ist dies der Pol der Quadripolarfläche, welche durch die Gerade EE' geht.

CAPITEL II.

EIGENSCHAFTEN DER HESSIANA EINER FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

190. Die Pole der Polarebenen, die durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ gehen, liegen auf der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$. Sollen diese Ebenen die Hessiana berühren, so sind die Pole auf der Curve achter Ordnung vertheilt, die den Durchschnitt der Hessiana mit der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ darstellt (183). Die Berührungspuncte bilden eine Curve der zwölften Ordnung, den Durchschnitt der Hessiana mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Hessiana. Die beiden Curven achter und zwölfter Ordnung sind also entsprechende Curven (168).

191. Wir wollen die Geraden betrachten, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und die Hessiana berühren. Den Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, entspricht ein Netz [1]) von Raumcurven vierter Ordnung (87), die sämmtlich auf einer Fläche S zweiter Ordnung liegen (der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$). Jede dieser Raum-

---

[1]) Ein solches Netz entsteht durch den Durchschnitt von S mit einem Netze anderer Quadripolarflächen.

curven entsteht als Durchschnitt von S mit einer andern Quadripolarfläche und folglich (190) liegen die Doppelpuncte dieser Curven (Berührungpuncte zwischen S und den andern Quadripolarflächen) auf der Curve c der achten Ordnung, Durchschnitt der Hessiana mit S. Den Curven des Netzes, die ein Büschel bilden, entsprechen gerade Linien durch $\mathfrak{p}$, die in einer Ebene liegen. In diesem Büschel gibt es zwölf Curven mit Doppelpunct [1]), das heisst: *die Geraden durch* $\mathfrak{p}$, *denen die Raumcurven vierter Ordnung mit Doppelpunct entsprechen, bilden einen Kegel* $\mathfrak{S}$ *der zwölften Ordnung.* Einem beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ der Curve c entspricht eine Generatrix von $\mathfrak{S}$, welche den Punct $\mathfrak{p}$ mit dem Puncte $\mathfrak{o}'$ verbindet, welcher in der Hessiana dem Puncte $\mathfrak{o}$ entspricht. Der Ort der Puncte $\mathfrak{o}'$ ist also eine Curve c' der zwölften Ordnung (190). Die Polarebene von $\mathfrak{o}$ geht durch $\mathfrak{p}$ und berührt die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ (183) und enthält folglich die Tangente von c' in $\mathfrak{o}'$. Diese Ebene ist daher die Tangentialebene des Kegels $\mathfrak{S}$ längs der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{o}'$, das heisst: der Kegel $\mathfrak{S}$ ist der Hessiana längs der Curve c' umgeschrieben.

Die Quadripolarfläche eines beliebigen Punctes schneidet c in sechszehn Puncten. Daraus folgt, dass $\mathfrak{S}$ und folglich auch die Hessiana von der sechszehnten Classe ist (165).

Betrachtet man eine Gerade g durch $\mathfrak{p}$ als Durchschnitt zweier Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{S}$, so hat jede dieser Ebenen einen Pol auf c und die Raumcurve des Netzes auf S, die durch diese beiden Pole geht, ist die entsprechende Curve von g. Fallen beide Pole zusammen, so wird die Raumcurve von c berührt. Daraus folgt, dass den Geraden, die auf dem Kegel $\mathfrak{S}$ und in seinen stationären Ebenen gezogen sind, Raumcurven des Netzes auf S ensprechen, welche c berühren.

192. Die Puncte, in denen die Hessiana von Geraden osculiert wird, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen, sind die Durchschnittspuncte dieser Fläche mit der ersten und zweiten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf dieselbe Fläche. Unter den Raumcurven des Netzes auf S gibt es also $4.3.2 = 24$, die eine Spitze haben.

Der Kegel $\mathfrak{S}$ ist daher von der 12-ten Ordnung und der 16-ten Classe und hat ausserdem 24 stationäre Generatrixen, also hat er gemäss den Formeln von Plücker (3) 22 Doppelgeneratrixen. Von diesen Doppelgeneratrixen entstehen zehn durch die Doppelpuncte der Hessiana und entsprechen denjenigen Curven des Netzes, die aus zwei Kegelschnitten bestehen — jeder Doppelpunct hat in der That ein Ebenenpaar als Quadripolarfläche (169) —, die andern zwölf Doppelgeneratrixen dagegen entsprechen ebensovielen Curven des Netzes, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzt sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir das Netz von Raumcurven vierter Ordnung auf der Quadrifläche S und nennen wie früher (24)

[1]) Denn ein Netz von Quadriflächen enthält zwölf Flächen, welche S berühren (131).

der Kürze wegen die Geraden der beiden Systeme, die auf dieser Fläche existieren, bezüglich *Generatrixen* und *Directrixen.* Es seien l, m, n drei Generatrixen von S; jede auf S gezogene Curve vierter Ordnung schneidet dann jede dieser Geraden in zwei Puncten, und fallen drei dieser Puncte, einer für jede Gerade, in eine gerade Linie, so zerfällt die Curve in zwei Theile, eine cubische Raumcurve und eine Gerade (Directrix). Ist $\mathfrak{l}$ ein beliebiger Punct von l, so schneidet die Directrix, welche durch $\mathfrak{l}$ geht, m und n in zwei Puncten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ und die Curve des Netzes, welche durch $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ geht trifft l in zwei Puncten $\mathfrak{l}'$. Ist umgekehrt $\mathfrak{l}'$ ein beliebiger Punct von l, so bilden die Curven des Netzes, die durch $\mathfrak{l}'$ gehen, ein Büschel und bestimmen so auf m und n zwei projectivische quadratische Involutionen. Schneidet eine Curve des Netzes m in $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ und n in $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$, so ist der Ort der zu $\mathfrak{m}\mathfrak{n}, \mathfrak{m}\mathfrak{n}', \mathfrak{m}'\mathfrak{n}, \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ analogen Geraden eine Fläche vierter Ordnung — m und n sind für dieselbe Doppelgeraden —, welche l in vier Puncten $\mathfrak{l}$ schneidet. Es fällt also sechsmal auf l ein Punct $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{l}'$ zusammen, das heisst, es gibt sechs Curven des Netzes, von denen jede aus einer cubischen Raumcurve und einer Directrix zusammengesetzt ist. Analog gibt es sechs andere Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Generatrix bestehen.

In einem Curvennetze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einer Quadrifläche gezogen sind, gibt es also:

1\. *zwölf Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden bestehen;* 2. *zehn Curven aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt;* 3. *vierundzwanzig Curven mit einer Spitze.*

193\. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punct der Hessiana, so ist der Kegel $\mathfrak{S}$ von der 10-ten Ordnung, der 16-ten Classe mit 10 Doppelgeneratrixen (nach den Doppelpuncten der Hessiana gerichtet) und 18 stationären Generatrixen. Das heisst: *In einem Netze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einem Kegel (der Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$*) gezogen sind, gibt es:* 1. *zehn, die aus zwei Kegelschnitten bestehen;* 2. *achtzehn mit einer Spitze;* 3. *sechs aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzte* (entsprechend den sechs Geraden, welche die Hessiana ausser in $\mathfrak{p}$ noch anderswo berühren (70)); 4. *zwei mit einer Spitze im Kegelscheitel.* Letztere entsprechen den beiden Geraden, welche die Hessiana in $\mathfrak{p}$ osculieren.

194\. Ist $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana, so wird diese Gerade in $\mathfrak{p}$ durch eine unbegrenzte Zahl von Ebenen berührt, deren Enveloppe ein Quadrikegel ist; die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ hat daher eine unbegrenzte Zahl Doppelpuncte in gerader Linie, das heisst, sie ist das System zweier Ebenen, die sich in einer Geraden p schneiden, die auf der Hessiana liegt, wie es aus der allgemeinen Theorie resultiert (167). Die Puncte dieser Geraden sind die Pole ebensovieler Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$. Diese Kegel bilden daher ein Büschel und gehen durch vier Gerade, deren Gesammtheit die Polarcurve von p darstellt. In diesem Büschel gibt es drei Systeme von je zwei Ebenen;

diese drei Systeme sind die Quadripolarflächen von drei speciellen Puncte der Geraden p, welche für die Hessiana Doppelpuncte sind. *Die zehn Doppelpuncte* $\mathfrak{p}$ *vertheilen sich also zu drei und drei auf die zehn Geraden* p, *und diese gehen zu drei und drei durch die zehn Puncte* $\mathfrak{p}$.

195. Da die Hessiana *im Allgemeinen* von der sechszehnten Classe ist, so hat sie ausser den zehn Puncten $\mathfrak{p}$ keine weiteren Doppelpuncte. Ebenso enthält sie ausser den zehn Geraden p keine andern Geraden. In der That entsprechen die vier Durchschnittspuncte einer Geraden g mit der Hessiana den vier Kegeln, die durch die Polarcurve vierter Ordnung von g gehen. Gehört g vollständig der Hessiana an, so entsprechen der unbegrenzten Zahl von Puncten von g eine unbegrenzte Zahl von Kegeln, die ein Büschel bilden und folglich denselben Scheitel haben. Dieser Scheitel ist für die Hessiana ein Doppelpunct, denn diese Fläche wird dort von den Polarebenen aller Puncte von g berührt.

Ein Doppelpunct $\mathfrak{p}$ liegt im Allgemeinen nicht auf seiner entsprechenden Geraden p; wenn dies der Fall wäre, so wäre die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$, und dieser Punct wäre also für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct.

196. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der Hessiana. Die Polarkegel von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ haben ihren Scheitel bezüglich in $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}$ und durchdringen sich gegenseitig in einer Raumcurve vierter Ordnung. Die beiden andern Quadrikegel, welche durch diese Curve gehen, sind die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, in denen die Hessiana durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ nochmals geschnitten wird. Die Scheitel dieser andern Kegel liegen in den Puncten $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, welche $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ entsprechen. Die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ sind also die Scheitel des Tetraeders, welches den Quadriflächen conjugiert ist, welche durch die Curve vierter Ordnung hindurchgehen, und folglich sind die Ebenen $\mathfrak{o}'\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bezüglich die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$. Deshalb *gehen die Tangentialebenen der Hessiana in* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{o}'$ *durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Da die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ gehen, so gehen umgekehrt die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, deren Scheitel $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind, durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$, enthalten daher die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ vollständig und schneiden sich also noch in einer cubischen Raumcurve.

Daraus, dass die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen, folgt, dass der Polarkegel dieser Geraden seinen Scheitel in $\mathfrak{u}'$ und in $\mathfrak{v}'$ hat (186), dass heisst, er reduciert sich auf die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$. *Die Polarebenen der Puncte von* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *gehen sämmtlich durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Die Puncte, in denen $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ die Hessiana trifft, sind die Pole der vier Quadrikegel, die durch die Curve vierter Ordnung gehen, welche die Polarcurve der betrachteten Geraden ist. Nun zerlegt sich aber diese Curve in zwei Theile (eine Gerade und eine cubische Raumcurve), und es gibt also nur zwei Quadrikegel, die durch dieses System gehen. Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ ist somit Tangente der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$.

Jede Gerade also, welche zwei correspondierende Puncte der Hessiana verbindet, besitzt daher die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Puncte durch eine feste Gerade gehen, die eine Doppeltangente der obigen Fläche ist.

197. Wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zusammenfallen, das heisst, wenn die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ die Hessiana berührt (natürlich in einem Puncte $\mathfrak{u}$, der von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ verschieden ist), so gehen die Polarflächen der Puncte von $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ durch dieselbe Gerade, die mit der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ einen vierpunctigen Contact hat.

Fallen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in einem Doppelpuncte $\mathfrak{p}$ zusammen, so werden die Puncte $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ unbestimmt auf der entsprechenden Geraden p (194); da aber die Polarkegel aller Puncte dieser Geraden durch $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen müssen (196), so folgt, *dass* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *eine der vier Geraden ist, welche die Polarcurve von* $\mathfrak{p}$ *bilden* (191).

198. Im Falle, dass $\mathfrak{o}$ ein parabolischer Punct der Fundamentalfläche ist, so liegt der Scheitel des Polarkegels im entsprechenden Puncte $\mathfrak{o}'$; ausserdem geht er durch $\mathfrak{o}$ und berührt die Polarebene von $\mathfrak{o}$ längs $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (16), das heisst diejenige Ebene, welche die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ berührt. Da der Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ seinen Scheitel auf $\mathfrak{o}$ hat, so folgt, dass die Polarkegel dieser beiden Puncte sich längs einer Raumcurve schneiden, für welche $\mathfrak{o}$ ein Doppelpunct ist. Einer der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ fällt mit $\mathfrak{o}'$ zusammen; der andere sei der Punct $\mathfrak{v}$. Dann ist also die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ ($\equiv \mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$) Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{v}'$ (196). Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche und die Hessiana in $\mathfrak{o}$ berühren, schneiden sich längs $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$, das heisst, *diese Gerade ist Tangente der parabolischen Curve der Fundamentalfläche in* $\mathfrak{o}$.

Es sei $\mathfrak{w}$ der Punct, in welchem die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ die Fundamentalfläche nochmals trifft. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{w}$ geht dann durch $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und trifft also die Ebene $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ in zwei Geraden, deren eine $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ ist, und die andere geht duch $\mathfrak{w}$. *Dieser Punct* $\mathfrak{w}$ *ist also der (einzige) Wendepunct der Curve dritter Ordnung (mit Spitze in* $\mathfrak{o}$*), längs deren die Fundamentalfläche von der stationären Ebene* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ *berührt wird* [1]).

199. *Wieviel Gerade gibt es in einer beliebigen Ebene* E, *die zu* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *analog sind (sie verbindet zwei entsprechende Puncte der Hessiana)?* Die Ebene E schneidet die Hessiana in einer Curve vierter Ordnung, welcher die windschiefe Berührungscurve sechster Ordnung zwischen der Hessiana und der gemeinen Polarfläche der Ebene E entspricht (168). Sei $\mathfrak{o}$ einer der Puncte, in denen E diese letztere Curve trifft. Dieser Punct hat, da er E angehört, seinen entsprechenden Punct $\mathfrak{o}'$ auf der Curve sechster Ordnung, und weil er dieser Curve angehört, muss sein entsprechender Punct auf E liegen. Es folgt daraus, dass die sechs Durchschnittspuncte der Ebene E mit der Raum-

---

[1]) Und $\mathfrak{w}\mathfrak{v}$ ist die stationäre Tangente.

curve sechster Ordnung, sich zu zwei und zwei entsprechen. Anderseits sind aber zwei entsprechende Puncte der Hessiana in Bezug auf eine beliebige Quadripolarfläche conjugiert, und die sechs Puncte, um die es sich handelt, sind also nach einer bekannten Theoreme, das man Hesse verdankt, die Scheitel eines vollständigen Vierseits. *Die Diagonalen dieses letztern sind die einzigen mit* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *analogen Geraden, welche in der gegebenen Ebene E liegen.* Die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden (196), welche den Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ der Ebene E entsprechen, liegen auf der Polarfläche von E (und in der nämlichen dreifachen Tangentialebene dieser Fläche), weil die Polarflächen der Puncte von E die Polarfläche dieser Ebene berühren (188).

200. Das betrachtete Vierseit ist bestimmt durch die Durchschnitte von vier beliebigen Quadripolarflächen, die nicht einem und demselben Netze angehören, mit der Ebene E; man weiss in der That, dass wenn vier Kegelschnitte in einer Ebene gegeben sind, es nur ein einziges Vierseit gibt, dessen Diagonalen durch jeden der gegebenen Kegelschnitte harmonisch getheilt wird [1]).

Zwei Gegenscheitel des Vierseits sind in Bezug auf die Kegelschnitte conjugiert, in denen die Ebene E die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet, und folglich ist das Vierseit der Curve dritter Ordnung eingeschrieben, welche die Jacobiana des von den genannten Kegelschnitten gebildeten Netzes und gleichzeitig der Schnitt der Polarfläche der Ebene E durch eben dieselbe Ebene ist. Die nämlichen sechs Puncte — die Scheitel des Vierseits — sind auch auf der ebenen Curve vierter Ordnung gelegen, welche E und der Hessiana gemein ist, welche letztere Fläche von der Polarfläche dieser Ebene in allen Puncten der Curve sechster Ordnung berührt wird. Diese sechs Puncte sind also ebenso viele Berührungspuncte zwischen den Curven, in denen E die Polarfläche und die Hessiana schneidet.

Es folgt hieraus, dass die Seiten des Vierseits die ebene Curve vierter Ordnung nochmals in vier Puncten auf einer geraden Linie g treffen. Diese Plancurve gehört dem Büschel an, welches durch das System der vier Geraden, welche das Viereck bilden, und das System der Curve dritter Ordnung und der Geraden g bestimmt ist. Hat daher diese letzte Curve einen Doppelpunct $\mathfrak{a}$, was eintritt, wenn E in $\mathfrak{a}$ die Fundamentalfläche berührt [2]), so fällt die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung mit der Polargeraden desselben Punctes in Bezug auf das System der vier Seiten des Vierseits zusammen (der harmonischen Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf das Vierseit).

Man weiss aber, wenn eine cubische Plancurve mit Doppelpunct durch die Scheitel eines vollständigen Vierseits geht, dass dann die Gerade, welche

1) *Mathematical questions from the Educational Times.* T. IV., London 1866; p. 110.

2) Hat eine cubische Raumcurve einen Doppelpunct, so gehen alle Polarkegelschnitte durch diesen Punct, der daher auch für die Jacobiana des Netzes der Polaren ein Doppelpunct ist.

die drei Wendepuncte verbindet, die harmonische Polare des Doppelpunctes in Bezug auf das Vierseit ist. Die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung geht daher durch die Wendepuncte der Curve dritter Ordnung, welche gleichzeitig die Wendepuncte des Schnittes der Fundamentalfläche durch E sind.

Folglich der Satz: *Die Durchschnittsgerade einer Tangentialebene der Fundamentalfläche mit der Polarebene des Berührungspunctes in Bezug auf die Hessiana geht durch die drei Wendepuncte des Schnittes, der durch die Tangentialebene auf der Fundamentalfläche erzeugt wird.*

Ist die Tangentialebene stationär, so kommt man auf ein schon bewiesenes Theorem (198) zurück.

201. Auf einer beliebigen Ebene E gibt es wieviel zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analoge Gerade (das heisst Gerade, deren Polarcurve das System einer Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und einer cubischen Raumcurve sind)? Die in der Ebene E gezogenen Geraden entsprechen den Raumcurven vierter Ordnung, welche durch die acht Pole der Ebene gehen. Es ist bekannt, dass diese acht Pole so unter einander verbunden sind, dass diejenige cubische Raumcurve, welche durch sechs von ihnen beschrieben ist, die Gerade, welche die beiden andern verbindet, zweimal schneidet. Die acht Puncte zu zweien combiniert geben nun $\frac{7.8}{2} = 28$ Curven vierter Ordnung, zusammengesetzt aus einer Geraden und einer cubischen Raumcurve. *Die gegebene Ebene enthält also* 28 *zu* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ *analoge Gerade*; sie sind die 28 Doppeltangenten des Schnittes der Hessiana durch die Ebene E.

Dieser Schnitt ist von der 12-ten Classe und hat 24 Wendepuncte. Man findet so die Eigenschaft wieder (191), dass es in einem Büschel von Raumcurven vierter Ordnung 12 mit Doppelpunct gibt, und weiter, *dass unter den Raumcurven dieser Ordnung, welche durch die acht Durchschnittspuncte dreier Quadriflächen gehen*, 24 *mit einer Spitze enthalten sind.*

202. Eine beliebige Gerade g trifft die Hessiana in vier Puncten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die vier entsprechenden Puncte. Da $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die Scheitel der vier Kegel desselben Büschels von Quadriflächen sind, so ist der Punct $\mathfrak{a}'$ der Pol der Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, das heisst $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{d}$ oder auch, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die Polarebene jedes der Puncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{a}'$. Dieser Kegel hat aber den Scheitel $\mathfrak{a}$, und folglich geht die Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{a}$.

Wenn also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *vier Puncte der Hessiana in gerader Linie sind, so sind die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *die Scheitel eines Tetraeders, dessen Seitenflächen* $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ *bezüglich durch* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *gehen.*

203. Alle Quadripolarflächen, welche durch einen Punct $\mathfrak{o}$ gehen, bilden ein Netz; darunter gibt es eine, welche in $\mathfrak{o}$ eine beliebig gegebene Ebene

berührt. Ist aber $\mathfrak{o}$ ein Punct der Hessiana und $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct, so werden alle Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in ihm von Ebenen berührt, die durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen (164); diejenigen, welche in $\mathfrak{o}$ dieselbe Ebene berühren, bilden ein Büschel, und ihre Pole liegen auf einer Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$. Daraus ergibt sich die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ als Polare der Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ und zugleich als Polare der Tangentialebene derselben Fläche in $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Mit andern Worten: *Die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und die Tangentialebene im nämlichen Puncte einer beliebigen Quadripolarfläche, welche durch ihn geht, sind conjugiert in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$.*

Umgekehrt: *Jede Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$ enthält die Pole einer unbegrenzten Zahl von Quadripolarflächen, die in $\mathfrak{o}$ von ein und derselben Ebene berührt werden.*

204. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana und p die entsprechende Gerade (194). Sobald jeder Punct von p dem Puncte $\mathfrak{p}$ entspricht, sind die Polarebenen aller Puncte von p Tangentialebenen der Hessiana in $\mathfrak{p}$ (183), das heisst, *der osculierende Quadrikegel, den die Osculierenden der Hessiana in $\mathfrak{p}$ bilden, ist der Polarkegel der Geraden p.* Dieser Kegel enthält die drei Geraden p_1, p_2, p_3 (analog zu p (194)), welche durch $\mathfrak{p}$ gehen, denn jeder Punct dieser Geraden ist der Pol eines Polarkegels, dessen Scheitel einer der drei Doppelpuncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ der Hessiana ist, die auf p liegen.

205. Die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt die Hessiana in der ganzen Länge der Geraden p (167) und schneidet also diese Fläche in einem Kegelschnitte c. Ebenso berührt die Polarebene von $\mathfrak{p}_1$ die Hessiana längs p_1; nun ist aber $\mathfrak{p}_1$ ein Punct von p; also: *Die Hessiana und der Polarkegel von p werden längs der drei gemeinschaftlichen Geraden p_1, p_2, p_3 durch dieselben Ebenen berührt, die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$.*

206. Der Punct $\mathfrak{p}$ und ein beliebiger Punct von p sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana, also ist die Gerade, welche diese Puncte verbindet, der Ort der Pole, deren Polarebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen, die eine Doppeltangente der Hessiana ist und in der Polarebene von $\mathfrak{p}$ liegt (196). Einer der Berührungspuncte liegt auf p, der andere gehört dem Kegelschnitt c an. Das heisst, jeder Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen ist und als Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (196) angesehen wird, entspricht als Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ eine Tangente von c. Es sei $\mathfrak{o}$ der Punct, in dem die erste Gerade von p getroffen wird und $\mathfrak{u}$ der Punct, in welchem dieselbe Gerade die Hessiana nochmals schneidet (die Puncte $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{v}$ fallen mit $\mathfrak{p}$ zusammen); $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ die Puncte, in denen die zweite Gerade bezüglich c berührt und p schneidet. Man sieht, dass der Kegelschnitt c zur entsprechenden Curve die cubische Plancurve (Ort der Puncte $\mathfrak{u}$) hat, in welcher die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Hessiana schneidet.

Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{o}$; nun berührt diese Ebene

den Polarkegel von p, und letzterer Kegel wird daher durch die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden berührt; das heisst, der Kegelschnitt c ist die Spur des Kegels auf der Polarebene von $\mathfrak{p}$. Also:

Der Osculationskegel der Hessiana in einem Doppelpuncte berührt diese Fläche in drei Geraden und schneidet sie ausserdem noch in einem Kegelschnitt, der in der Polarebene des Doppelpunctes liegt.

207. Es gibt weitere Eigenschaften der Ebene $\mathfrak{p}p$, die erwähnt werden müssen.

Der Polarkegel von $\mathfrak{u}'$ geht durch $\mathfrak{p}$, ausserdem ist die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf diesen Kegel (nämlich die Tangentialebene dieses Kegels längs $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$) die Polarebene von $\mathfrak{u}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{p}$ (83), das heisst die Ebene $\mathfrak{p}p$. Die letztere Ebene berührt also die Polarkegel sämmtlicher Puncte des Kegelschnittes c, und die Berührungsgeneratrixen gehen durch $\mathfrak{p}$.

Sobald die Ebene $\mathfrak{p}p$ in $\mathfrak{o}$ die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{u}'$ berührt, so berührt sie im nämlichen Puncte die ersten Polarflächen aller Puncte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{u}'$, und schneidet sie in Geradenpaaren in Involution, deren Doppelstrahlen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ und p sind. Zwei conjugierte Gerade r, r' dieser Involution gehören einer ersten Polarfläche an, deren Pol $\mathfrak{q}$ sei (ein Punct von $\mathfrak{p}\mathfrak{u}'$). Denken wir uns eine Ebene durch $\mathfrak{q}$ und eine beliebige Tangente $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ von c. Die ersten Polarflächen von $\mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1$ gehen zusammen (196) durch die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{u}_1$, welche $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ entspricht (wie $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ der Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$), also sind die Puncte, in denen diese Gerade r, r' trifft, zwei Pole der Ebene $\mathfrak{q}\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$. Das heisst, die Polarebenen der Puncte der Geraden r, r' umhüllen ein und denselben Kegel $\mathfrak{q}c$. Alle analogen Kegel gehen durch den Kegelschnitt c, und dieser stellt daher, und zwar er allein, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene $\mathfrak{p}p$ vor. Man kann dies auch auf folgende Weise zeigen.

Der Doppelpunct $\mathfrak{p}$ hat die Eigenschaft, dass alle Quadripolarflächen, die durch ihn gehen, in ihm durch dieselbe Ebene $\mathfrak{p}p$ berührt werden (203). Daraus folgt, dass, wenn man durch $\mathfrak{p}$ die beiden Geraden zieht, welche jede die windschiefe Polarcurve vierter Ordnung einer beliebigen Geraden t des Raumes in zwei Puncten trifft, diese beiden Geraden stets in der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, das heisst, die Polarcurve einer beliebigen Geraden hat stets zwei Sehnen, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen und in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gelegen sind. Es sei $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ eine dieser Sehnen. Jeder der Puncte, in welchem sie auf der Raumcurve aufsteht, hat eine Polarebene, die durch t und $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ geht (daraus folgt, dass t die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ schneidet); diese beiden Geraden geben aber eine einzige Ebene, also sind die beiden Puncte, in denen $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ die Raumcurve schneidet, die Pole ein und derselben Ebene, die durch t geht. Zwei dieser Polarebenen (in Bezug auf die beiden Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$) werden durch die beiden Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bestimmt, welche man in der Ebene von c so ziehen kann, dass sie die Spur von t enthalten und den Kegelschnitt berühren; durch eine Gerade t

gehen also nur zwei Ebenen, deren Pole auf der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, und diese Ebenen berühren c; mit andern Worten, *dieser Kegelschnitt ist die vollständige Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{p}p$.

Ein beliebiger Punct der Polarebene von $\mathfrak{p}$ gehört zwei Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ (Tangenten von c) an, und folglich geht die Quadripolarfläche dieses Punctes durch die beiden entsprechenden Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ (196), das heisst, sie berührt in $\mathfrak{p}$ die Ebene $\mathfrak{p}p$. *Der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *berühren, ist also zusammengesetzt:* 1. *Aus dem Kegel* $\mathfrak{p}c$, *dessen Puncte Quadripolarflächen besitzen, welche* $\mathfrak{p}p$ *berühren, und zwar in einem Puncte von* $\mathfrak{p}$*;* 2. *Aus der Polarebene von* $\mathfrak{p}$, *in welcher die Puncte des Kegelschnittes* c *die Pole der Polarkegel sind, welche die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in Geraden berühren, die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehen, während die Quadripolarflächen der andern Puncte dieser Ebene die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in* $\mathfrak{p}$ *berühren.*

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass die Raumcurve sechster Ordnung, welche im Allgemeinen die Berührungscurve der Hessiana mit der Polarfläche einer Ebene ist (158), sich, wenn diese Ebene die Ebene $\mathfrak{p}p$ ist, auf das System der vier Geraden p, p_1, p_2, p_3 und den Kegelschnitt c reduciert.

208. Eine beliebig durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ gelegte Gerade trifft die Hessiana in zwei weiteren Puncten $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die entsprechenden Puncte. Die ersten Polarflächen der Puncte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ gehen durch zwei Kegelschnitte die in zwei Ebenen liegen, welche die Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ bilden und durch p gehen (194). In dem Büschel dieser ersten Polarflächen sind folgende Puncte diejenigen, deren Polarebene in Bezug auf diese Flächen constant ist: 1. die Puncte $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ (Scheitel der Kegel des Büschels), deren Polarebenen in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels bezüglich $p\mathfrak{d}'$ und $p\mathfrak{c}'$ sind, und 2. die Puncte von p, deren Polarebenen in Bezug auf die nämlichen Quadriflächen durch die Gerade $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ gehen. Die Ebene $p\mathfrak{d}'$ ist also die gemischte Polarebene der Puncte $\mathfrak{d}, \mathfrak{c}'$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}'$, dessen Scheitel $\mathfrak{c}$ ist. Daraus folgt, dass die Ebene $p\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{c}$ geht, und analog die Ebene $p\mathfrak{c}'$ durch $\mathfrak{d}$.

Ist ausserdem $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct von p, so geht die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$; mit andern Worten, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{c}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{x}$, dessen Scheitel $\mathfrak{p}$ ist, das heisst, die Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ sind in gerader Linie. Also:

Wenn eine durch einen Doppelpunct $\mathfrak{p}$ *gezogene Gerade die Hessiana in* $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *schneidet, so liegen die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *ebenfalls mit* $\mathfrak{p}$ *in gerader Linie, und die Geraden* $\mathfrak{c}\mathfrak{d}', \mathfrak{c}'\mathfrak{d}$ *treffen sich auf der Geraden* p.

209. Diese Schlüsse gelten auch dann noch, wenn der Punct $\mathfrak{c}$ auf eine Gerade p_4 fällt, eine der Geraden auf der Hessiana aber von p (der $\mathfrak{p}$ entsprechenden) verschieden, ebenso von p_1, p_2, p_3 (die durch $\mathfrak{p}$ gehen), nämlich einem Puncte $\mathfrak{p}_4$ entsprechend, der etwa auf p_1 liegt. Nun wird $\mathfrak{c}'$

der Doppelpunct $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{d}'$ ist ein Punct der Geraden p_1. Der nämliche Punct $\mathfrak{d}'$ ist der Pol einer ersten Polarfläche mit einem Doppelpunct in $\mathfrak{d}$; nun haben aber die Nichtdoppelpuncte von p_1 als Quadripolarflächen Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}_1$, also ist $\mathfrak{d}'$ der dritte Doppelpunct $\mathfrak{p}_5$ der auf p_1 liegt, und folglich fällt $\mathfrak{d}$ auf die Gerade p_5.

Ist der Punct $\mathfrak{c}$ auf p_4 variabel, so bleiben die Puncte $\mathfrak{c}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_4$) und $\mathfrak{d}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_5$), die beide auf der festen Geraden p_1 liegen, unverändert, also wird $\mathfrak{d}$ nicht aus p_5 herausgehen. Daraus folgt, dass die Geraden p_4 und p_5 in einer Ebene liegen, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Ebene muss ausserdem die Hessiana in einer Curve zweiter Ordnung mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ schneiden; letztere Curve ist also das System zweier Geraden, die nothwendigerweise mit p_2 und p_3 zusammenfallen.

Der gemeinschaftliche Punct der Geraden p^4, p_5 ist der Pol einer Quadripolarfläche mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_5$, das heisst einer Quadrifläche, die aus zwei Ebenen besteht, die durch p_1 gehen; also ist der p_4 und p_5 gemeinschaftliche Punct der Punct $\mathfrak{p}_1$ (der auf p liegt).

Die Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 bilden also ein vollständiges ebenes Vierseit, dessen Scheitel sechs Doppelpuncte der Hessiana sind. Zwei Gegenscheitel sind entsprechende Puncte, das heisst, jeder derselben liegt auf der entsprechenden Geraden des andern.

Wie gross ist die Zahl der Ebenen, die derjenigen analog sind, welche die vier Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 enthält? Durch jeden der Puncte $\mathfrak{p}$ gehen drei solche Ebenen, und jede Ebene enthält sechs Puncte $\mathfrak{p}$, die Zahl der Ebenen ist also $\frac{3 \cdot 10}{6} = 5$.

Oder auch anders: Zwei dieser Ebenen gehen durch jede der Geraden p und jede Ebene enthält vier Gerade p, die Zahl der Ebenen ist folglich $\frac{2 \cdot 10}{4} = 5$.

Diese fünf Ebenen bilden einen P e n t a e d e r (zuerst von Sylvester entdeckt), *dessen Scheitel und Kanten bezüglich die zehn Puncte $\mathfrak{p}$ und die zehn Geraden p sind.*

Von diesen fünf Ebenen gehen drei durch $\mathfrak{p}$ und die andern durch p, also hat der gemeinschaftliche Scheitel dreier Seitenflächen des Pentaeders den Durchschnitt der beiden übrigen Seitenflächen zur entsprechenden Geraden.

210. Will man das System dieser fünf Ebenen studieren, so ist es am Besten, dieselben durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu bezeichnen, in der Art, dass die zehn Scheitel $\mathfrak{p}$ (Doppelpuncte der Hessiana) und die bezüglichen zehn Gegenkanten (entsprechen den Geraden p) bezeichnet sind durch:

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345
45, 35, 34, 25, 24, 23, 15, 14, 13, 12.

Ein beliebiger Punct der Geraden 12 hat zur Quadripolarfläche einen Kegel, der dem Trieder conjugiert ist (194), das durch die Ebenen 3, 4, 5 gebildet wird. Ebenso sind die Polarkegel, deren Pole beliebig auf den

Geraden 13, 14, 15 angenommen sind, den Triedern 245, 235, 234 bezüglich conjugiert. Daraus folgt, dass alle Quadripolarflächen des durch diese vier Kegel bestimmten Netzes, nämlich die Quadripolarflächen aller Puncte der Ebene 1, ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, nämlich dem Tetraeder 2345.

Die Ebenen 1, 2, 3, 4, 5 *sind die einzigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Quadripolarflächen aller Puncte einer jeden von ihnen demselben Tetraeder (das durch die vier andern gebildet wird) conjugiert sind;* weil man beweisen kann, dass, wenn die Quadripolarflächen eines Netzes ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, die Kanten desselben in der Hessiana liegen. In der That ist diese Fläche die Jacobiana (139) des linearen Systems, das durch genanntes Netz und eine andere nicht zum Netze gehörige Quadripolarfläche S bestimmt ist. Nimmt man auf einer Kante des Tetraeders einen Punct $\mathfrak{o}$ an, auf der Gegenkante dort den Punct $\mathfrak{o}'$, wo dieselbe durch die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S geschnitten wird, so sind die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ in Bezug auf alle Flächen des Systems conjugiert, und gehören also der Hessiana an.

211. Wir haben oben (196, 201) bewiesen, dass jede Bitangente der Hessiana die Eigenschaft besitzt, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer andern Geraden zu sein, welche die beiden entsprechenden Puncte der Fläche verbindet. Unter den Geraden, welche diese Eigenschaft besitzen, befinden sich die zehn Kanten des Pentaeders und die fünfzehn Diagonalen seiner Seitenflächen. Jede Kante, wie 12, entspricht einem Büschel Polarkegel (194), dessen Basis das System der vier Geraden ist, welche im entsprechenden Puncte 345 zusammenlaufen; und umgekehrt (87): *die Polarebenen der Puncte jeder dieser vier Geraden gehen durch die Gerade* 12. Jede Diagonale, wie $\{123\}\{145\}$, entspricht einem Büschel von Quadripolarflächen, die nicht Kegel sind, deren Basis das System der vier Geraden ist, gebildet durch den Durchschnitt der beiden Ebenenpaare, welche die Quadripolarflächen der Puncte 123, 145 darstellen, und umgekehrt: *Die Polarebenen der Puncte dieser vier Geraden gehen sämmtlich durch die betrachtete Diagonale.*

212. Wir haben gezeigt, dass einer beliebigen Geraden $\mathfrak{pcd}$ durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ eine Gerade $\mathfrak{pc'd'}$ entspricht (208), und aus dem Vorhergehenden (209) folgt, dass, wenn die Gerade $\mathfrak{pcd}$ in eine Seitenfläche des Trieders $p_1p_2p_3$ fällt, die Gerade $\mathfrak{pc'd'}$ mit der Gegenkante desselben Trieders zusammenfällt. Ist umgekehrt $\mathfrak{pcd}$ eine der Geraden p_1, p_2, p_3, so ist $\mathfrak{pc'd'}$ eine beliebige unter den Geraden, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und in der Ebene der beiden andern Geraden p liegen.

Fällt $\mathfrak{pcd}$ mit $\mathfrak{pc'd'}$ zusammen, das heisst, sind $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zwei entsprechende Puncte, so ist $\mathfrak{pcd}$ (197) eine der vier Geraden, durch welche die Polarkegel vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gehen.

Ist $\mathfrak{pcd}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen, so fällt $\mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich

osculiert die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ die Hessiana in $\mathfrak{p}$; also erzeugt, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{p}$ variabel ist in der Ebene $\mathfrak{p}p$, die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ den Polarkegel von p; und während $\mathfrak{c}$ die Gerade p durchläuft, und $\mathfrak{d}$ eine cubische Plancurve mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ beschreibt, erzeugt der Punct $\mathfrak{d}'$ den Kegelschnitt c, Durchschnitt des genannten Kegels mit der Hessiana (206). Sobald $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die Hessiana osculiert, das heisst, wenn sie in $\mathfrak{p}$ einen der Zweige der cubischen Plancurve berührt, so fällt $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich auch $\mathfrak{d}'$ auf p. Daraus ergibt sich, dass die beiden Durchschnittspuncte des Kegelschnittes c mit der Geraden p den beiden Puncten der cubischen Plancurve entsprechen, welche unendlich nahe $\mathfrak{p}$ liegen.

213. Verschiebt sich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in einer Ebene E durch $\mathfrak{p}$, so erzeugt die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ einen Kegel, der durch p_1, p_2, p_3 geht, wegen der drei Geraden, in denen E die Seitenflächen des Trieders $p_1p_2p_3$ schneidet (212). Dieser Kegel ist durch zwei andere Generatrixen bestimmt, weil zwei Gerade, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, die Ebene E bestimmen. Die Kegel, welche in dieser Weise zwei Ebenen E, E_1 entsprechen, haben eine einzige gemeinschaftliche Generatrix (ausser p_1, p_2, p_3) nämlich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, welche der Durchschnittslinie $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der beiden Ebenen entspricht. Die Kegel, welche den Ebenen E entsprechen, sind also zweiter Ordnung.

Wir haben so *eine Transformation der Figuren erhalten, welche aus Geraden (also auch aus Ebenen und Kegeln) gebildet werden, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen. Einer Geraden entspricht eine Gerade, einer Ebene entspricht ein Quadrikegel, der dem Trieder $p_1p_2p_3$ umgeschrieben ist, und umgekehrt.*

Sobald die Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ und ebenso $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ in Bezug auf jede Quadrifläche conjugiert sind, *so sind die Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ in Bezug auf sämmtliche Polarkegel vom Scheitel $\mathfrak{p}$ conjugiert.* Diese Kegel bilden ein Büschel und gehen durch die vier Geraden, welche ihnen entsprechen, und diese vier Geraden bilden ein vollständiges Vierkant, dessen Diagonalgerade p_1, p_2, p_3 sind (Durchschnitte der Ebenenpaare, welche dem Büschel angehören, und die Quadripolarflächen der Puncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ sind). Also: *Der Quadrikegel, der dem Trieder $p_1p_2p_3$ umgeschrieben ist und einer Ebene E entspricht, ist der Ort der Polargeraden dieser Ebene in Bezug auf die Kegel jenes Büschels.* Folglich schneidet obiger Kegel die Ebenen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 längs der conjugierten Geraden der Durchschnittsgeraden derselben mit E in Bezug auf die respectiven Geradenpaare p_1, p_2; p_3, p_1; p_1, p_2. Derselbe Kegel trifft die Ebene E längs zweier entsprechender Geraden, von denen jede eine Berührungsgeneratrix zwischen E und einem Kegel des Büschels ist; die Ebenen, welche durch p_1 gehen und bezüglich durch zwei entsprechende Gerade, bilden ein harmonisches System mit den Ebenen p_1p_2, p_1p_3; u. s. w.

214. Wir betrachten einen Cubikegel (Kegel dritter Ordnung), der durch die sechs Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_3, p_1, p_2, p_3$ geht und längs der drei letzten

durch die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ berührt wird [1]). Es sei $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eine Generatrix dieses Kegels. Die Ebene $p\mathfrak{c}$ schneidet die Hessiana und diesen Kegel längs zwei cubischen Plancurven, die sieben Puncte gemein haben, von denen drei dieselben Tangenten besitzen; diese cubischen Curven fallen also zusammen. Das heisst: *Der Cubikegel trifft die Hessiana in einer Plancurve* (dritter Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{c}$ ist, *und also noch in einer andern Plancurve* (derselben Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{d}$ ist. Jede dieser beiden Ebenen genügt offenbar, um auf eine einzige Weise den Cubikegel und die andere Ebene zu bestimmen; *also bilden diese Ebenenpaare, die die Durchschnittscurven der Hessiana mit den Cubikegeln des Büschels*, um das es sich handelt, *enthalten, eine Involution;* die Doppelebenen derselben enthalten die Berührungscurven zwischen der Hessiana und zwei Kegeln des Büschels. Das heisst: *Die Tangenten, welche man vom Puncte $\mathfrak{p}$ aus an die Hessiana ziehen kann, bilden zwei Cubikegel, und die Berührungscurven befinden sich in zwei durch p gehenden Ebenen;* das System dieser beiden Ebenen ist folglich die Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{p}$. Also: *Die Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ besteht aus zwei Ebenen, welche mit denjenigen beiden Ebenen ein harmonisches System bilden, welche die beiden cubischen Plancurven enthalten, die ein und demselben Cubikegel des Büschels angehören.*

Unter den Kegeln dieses Büschels gibt es auch den, welcher durch die Ebene $\mathfrak{p}p$ und den Polarkegel von p gebildet wird. Die Ebenen der Schnitte, welche denselben entsprechen, sind die Ebenen $\mathfrak{p}p$ und die Polarebene von $\mathfrak{p}$. Ein anderer Kegel desselben Büschels ist das Trieder $p_1p_2p_3$, das durch diejenigen drei Seitenflächen des Pentaeders gebildet wird, welche in $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen. Die entsprechenden Schnitte liegen in den beiden andern Seitenebenen des Pentaeders, welche durch p gehen, und jeder von ihnen ist das System dreier Geraden. Hieraus zieht man, *dass die beiden Ebenen, welche die Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ darstellen, und die beiden Seitenflächen des Pentaeders, welche durch p gehen, ein harmonisches System bilden.*

215. Die Ebenen $p\mathfrak{c}, p\mathfrak{d}$ gehen bezüglich durch $\mathfrak{d}', \mathfrak{c}'$ (208), folglich geht der Cubikegel des erwähnten Büschels, welcher durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ geht, auch durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, das heisst (113), *dieser Kegel entspricht sich selbst.* Man schliesst hieraus und aus bekannten Eigenschaften der cubischen Plancurven [2]), dass die Tangentialebenen unseres Kegels längs zweier entsprechender Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ sich in einer Generatrix des nämlichen Kegels schneiden; dass jeder

---

1) Die analogen Cubikegel bilden ein Büschel, denn die gemeinsamen Bedingungen sind neun Geraden äquivalent, durch welche das System der drei Ebenen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 und das System der Ebene $\mathfrak{p}p$ und des Polarkegels der Geraden p gehen.

2) Man kann in der That den Cubikegel als Jacobiana eines Netzes von Quadrikegeln vom Scheitel p betrachten, dem das Polarkegelbüschel der Puncte von p angehört.

Quadrikegel, der dem Trieder $p_1 p_2 p_3$ umgeschrieben ist, den Cubikegel längs der drei Berührungsgeneratrixen schneidet, welche dieser Kegel mit ein und demselben Kegel zweiter Ordnung besitzt; und dass diese drei Generatrixen ein Trieder bilden, dessen Seitenflächen den Cubikegel in drei neuen Geraden schneiden, welche in der Ebene liegen, welche dem ersten Quadrikegel entspricht. U. s. w.; u. s. w.

216. Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen über die Polarfläche einer beliebigen Ebene E machen, welche durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ geht. Da dieser Punct der Scheitel einer unbegrenzten Zahl von Polarkegeln ist, deren Pole die Puncte von p sind, *so geht die Polarfläche durch diese Gerade* und ist längs derselben durch die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt. Dieselbe Fläche geht ausserdem noch durch $\mathfrak{p}$ und wird in diesem Puncte von der Polarebene des Punctes $\mathfrak{i}$ berührt, in dem E von p getroffen wird. Unter den Polarkegeln vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gibt es zwei, welche die Ebene E berühren; also (188): *Die Polarfläche hat zwei Doppelpuncte auf p.*

Die Quadripolarflächen, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, treffen E in Kegelschnitten, die in $\mathfrak{p}$ durch ein und dieselbe Gerade $\mathfrak{pi}$ (Durchschnitt der Ebenen E und $\mathfrak{p}p$) berührt werden. Ein beliebiger Punct dieser Geraden ist für einen dieser Kegelschnitte ein Doppelpunct, das heisst, er ist ein Berührungspunct zwischen E und einer ersten Polarfläche durch $\mathfrak{p}$. Alle analogen ersten Polarflächen gehen daher durch die Gerade $\mathfrak{pi}$, und ihre Pole sind auf der Geraden gelegen, welche den Durchschnitt der Polarebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{i}$ bilden. Daraus ergibt sich, *dass diese letztere Gerade der Polarfläche von E angehört.*

Diese Polarfläche berührt die Hessiana längs einer Raumcurve sechster Ordnung (158), die sich in unserem speciellen Falle in zwei Theile theilt, die Gerade p und eine Raumcurve fünfter Ordnung, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Curve, als dem Schnitte der Ebene E auf der Hessiana entsprechend, bildet in Verbindung mit den Geraden p_1, p_2, p_3 den vollständigen Durchschnitt dieser Fläche mit dem Quadrikegel, welcher der Ebene E entspricht (213). Der letztere Kegel schneidet daher die Polarfläche von E nochmals in einer Geraden. In der That, sobald die Ebene E durch die entsprechenden Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{i}$ der Hessiana geht, berührt sie in $\mathfrak{i}$ ein Büschel von Quadripolarflächen (203), deren Pole auf einer Geraden durch $\mathfrak{p}$ sich befinden, die in der Polarfläche liegt; und diese Fläche wird längs jener Geraden durch die Polarebene von $\mathfrak{i}$ berührt. Dieselbe Gerade enthält die beiden andern Doppelpuncte der Fläche, welche die Pole der beiden Kegel sind, die zu dem Büschel gehören. Diese beiden Kegel haben daher ihre Scheitel auf einer in der Ebene E durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden, welche der ersten Geraden entspricht.

217. Indem man diese Betrachtungen auf die Ebenen des Pentaeders **12345** (210) anwendet, sieht man, dass die Kanten des Tetraeders **2345** die Curve sechster Ordnung (entsprechend dem Vierseit mit den Seiten **12**, **13**,

14, 15) bilden, längs dessen die Hessiana durch die Polarfläche der Ebene 1 berührt wird. Diese Fläche hat daher die Puncte 234, 235, 245, 345 (die Scheitel des Tetraeders) zu Doppelpuncten. Dieselbe Fläche enthält als reciproke Fläche der *Steinerschen* Fläche (188) drei andere Gerade die in derselben Ebene liegen. Diese Geraden sind (216) die Durchschnitte der Polarebenen der Punctenpaare (123, 145), (124, 135), (143, 125), der Gegenscheitel des Vierseits. Sie bilden gleichzeitig ein Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, von dem jeder Scheitel der Pol einer ersten Polarfläche ist, die die Ebene 1 berührt, und durch zwei Gegenscheitelpaare des Vierseits geht; also sind die Diagonalen dieses Vierseits zu zweien combiniert die Durchschnitte der Ebene 1 mit den ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$; das heisst, die Scheitel $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ des Diagonaldreiecks sind die Pole der Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$.

Der Ebene 2 entspricht ebenso eine Ebene $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, welche die Polarebene jedes Scheitels des Dreiecks $\mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2$ ist, das durch die Diagonalen des Vierseits (21, 23, 24, 25) gebildet wird; u. s. w. für die übrigen Ebenen des Pentaeders. Nun gehen aber die Ebenen, die vom Puncte 345 aus durch die Diagonalen

$$\{123\}\{145\} \equiv \mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1, \quad \{124\}\{135\} \equiv \mathfrak{c}'_1\mathfrak{a}'_1, \quad \}125\{\{134\} \equiv \mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1$$

gezogen sind, auch durch die Diagonalen

$$\}123\{\}245\{ \equiv \mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2, \quad \{124\}\}235\{ \equiv \mathfrak{c}'_2\mathfrak{a}'_2, \quad \}125\{\{234\} \equiv \mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2,$$

weil die Punctenpaare

(145, 245), (135, 235), (134, 234)

mit 345 in gerader Linie liegen; also treffen sich die Geraden $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_1\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_1\mathfrak{c}'_2$ in demselben Puncte 345.

Da die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ die Polarebene der Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ ist, so folgt daraus, dass die Quadripolarfläche des gemeinschaftlichen Punctes dieser Ebene und der Geraden 12 ein Kegel ist, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ und durch die vier Geraden (durch 345) geht, welche die Basis des Polarkegelbüschels der Puncte von 12 bilden. Ebenso ist die Quadripolarfläche des Punctes, in welchem $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ die Gerade 12 schneidet ein Kegel, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$ und durch dieselben vier Geraden geht. Nun liegen aber die Puncte $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2$; $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2$; $\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}'_2$ mit dem Puncte 345, dem gemeinschaftlichen Scheitel beider Kegel, in gerader Linie; die beiden Kegel fallen also zusammen, das heisst, die Ebenen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ treffen die Gerade 12 in demselben Puncte. Also: *Die Ebenen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2, \ldots$, welche den Seitenflächen 1, 2,... des Pentaeders entsprechen, bilden ein neues Pentaeder, dessen Kanten die entsprechenden Kanten des ersten treffen, und daher liegen die fünf Geraden, in denen sich die entsprechenden Seitenebenen der beiden Pentaeder schneiden, in einer einzigen Ebene.*

218. Wir haben oben bewiesen, dass dem Schnitte der Hessiana durch eine Ebene E eine Raumcurve k sechster Ordnung entspricht (168). Es sei $\mathfrak{o}$ ein Punct von k, $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct von E. Die Polargerade

der Ebene E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$ trifft die Hessiana nicht blos in $\mathfrak{o}'$, sondern auch in drei anderen Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Die Ebene E ist also die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{o}, \mathfrak{l}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{n}$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. E enthält daher die Scheitel dieser drei Kegel, und folglich gehören die Puncte $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ der k an. Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel in dieser Ebene liegen, treffen jede die Raumcurve k in drei Puncten.*

Wie viel solcher Polargeraden der Ebene E gehen durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ von k? Man muss einen Punct suchen, welcher mit $\mathfrak{o}$ als gemischte Polarebene die E hat; solcher Punct ist jeder Punct der Polargeraden von E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Diese Gerade trifft, wie man vorhin gesehen, die Curve k in drei Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$; und die Polargeraden von E in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gehen durch $\mathfrak{o}$. *Es gibt also drei Polargerade, welche durch einen beliebigen Punct von k gehen.*

Wie viel dieser Polargeraden trifft eine willkürliche Gerade g? Oder anders, wie viel Puncte gibt es auf g, welche E als Polarebene haben in Bezug auf einen Polarkegel, dessen Pol auf k liegt? Die Pole der Quadripolarflächen, in Bezug auf welche die Puncte von g die Pole von E sind (187), liegen auf einer cubischen Raumcurve, welche mit k acht Puncte gemein hat (121). Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel sich in dieser Ebene befinden, bilden eine Fläche achter Ordnung. Für diese Fläche ist k eine dreifache Curve,* denn in jedem ihrer Puncte kreuzen sich drei Generatrixen. *Die nämliche Fläche geht durch die zehn Geraden p,* weil jede dieser letztern als Polargerade einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Quadripolarfläche des entsprechenden Punctes $\mathfrak{p}$ betrachtet werden kann.

Die Generatrixen der Fläche treffen die Ebene E in den Scheiteln der Polarkegel, also *enthält die Fläche den ebenen Schnitt der Hessiana auf E.* Sie enthält ausserdem noch vier Gerade, die auch auf E liegen. Es sind dies die Berührungsgeneratrixen von E mit den vier Polarkegeln, deren Pole die Doppelpuncte der Polarfläche von E sind (188).

Ist E die Ebene im Unendlichen, so sind die Polarkegel der Puncte von k Cylinder, unter denen diejenigen, welche E berühren, vier an der Zahl, parabolisch sind. Die Polargeraden von E werden die Axen dieser Cylinder.

219. Von welcher Classe ist die *Enveloppe der Ebenen, welche die Fundamentalfläche F_3 in harmonischen cubischen Curven schneidet* [1])? Es sei g eine willkürliche Gerade, $\mathfrak{x}$ ein Punct, welcher g und der Fundamentalfläche

---

[1]) Eine Plancurve dritter Ordnung heisst *harmonisch* oder *äquianharmonisch* nach den Specialwerthen des constanten Doppelverhältnisses von vier Tangenten, die von einem beliebigen Puncte der Curve ausgehen. *Einleitung*, No. 27, 131 b.

gemein ist; man muss nun eine solche Ebene, welche durch g geht, suchen, dass die vier Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 in dieser Ebene ziehen kann, ein harmonisches System bilden. Nun bilden die Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 ziehen kann (67) einen Kegel vierter Ordnung, welcher, da er im Allgemeinen keine Doppelgeneratrixen hat, noch stationäre, von der zwölften Classe ist. Indem man diesen Kegel und die Gerade g durch eine Ebene schneidet, erhält man eine allgemeine Curve c vierter Ordnung und einen Punct $\mathfrak{g}$. Es handelt sich nun darum, von $\mathfrak{g}$ eine Gerade zu ziehen, welche c in vier harmonischen Puncten schneidet. Man weiss aber [1]), dass dieses Problem sechs Auflösungen zulässt, also ist die gesuchte Enveloppe *eine Fläche von der sechsten Classe.*

Auf die nämliche Weise findet man den Satz: *Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, umhüllen eine Fläche vierter Classe.*

Eine cubische Curve mit einer Spitze ist gleichzeitig ein Specialfall der harmonischen cubischen Curve und der äquianharmonischen. Also *sind die beiden Flächen sechster und vierter Classe,* welche wir eben betrachtet haben, *in die Developpable* (172) *eingeschrieben, die durch die stationären Tangentialebenen gebildet wird* (das heisst, die der Fundamentalfläche längs der parabolischen Curve umgeschrieben ist).

Unter den Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, befinden sich auch die zehn zu $\mathfrak{p}p$ analogen Ebenen (207), dass heisst diejenigen, welche durch einen Doppelpunct und die entsprechende Gerade gehen. In der That ist die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Ebenenpaar, dass durch p geht, und die ersten Polarflächen der Puncte von p sind Kegel, welche die Ebene $\mathfrak{p}p$ längs Geradenpaaren durch $\mathfrak{p}$ in Involution schneiden. Die Doppelstrahlen dieser Involution und die Gerade p bilden also die Jacobiana des Netzes von Kegelschnitten, längs deren die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet. (Diese Jacobiana ist der Schnitt der Ebene $\mathfrak{p}p$ durch die Polarfläche dieser Ebene). Wenn aber die Jacobiana des Netzes der Polarkegelschnitte das System dreier Geraden ist, so ist die Fundamentalcurve äquianharmonisch, folglich trifft die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Fundamentalfläche in einer äquianharmonischen cubischen Curve.

---

[1]) Steiner, *Ueber solche algebraische Curven u. s. w.* (Crelles Journal, Bd. 47. S. 102).

CAPITEL III.

DIE SIEBENUNDZWANZIG GERADEN EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

220. Eine Bitangentialebene der Fundamentalfläche F_3 schneidet diese Fläche in einer cubischen Curve mit zwei Doppelpuncten (den beiden Berührungspuncten), dass heisst in einer Geraden und einem] Kegelschnitte. Die Zahl der auf F_3 liegenden Geraden ist also gleich der Zahl der Bitangenten, welche durch einen beliebigen Punct des Raumes gehen, oder auch gleich der Classe der developpablen Fläche, welche die Enveloppe der Bitangentialebenen ist. Diese Classe ist nun (67) gleich 27, *also enthält eine Fläche dritter Ordnung im Allgemeinen* 27 *Gerade.*

Ist a eine dieser Geraden, so schneidet jede durch a gelegte Ebene die Fläche in einem Kegelschnitt und berührt sie in den beiden Durchschnittspuncten dieses Kegelschnittes mit a (171). Lässt man die Ebene um a rotieren, *so erzeugen die beiden Berührungspuncte eine Involution*, deren Doppelpuncte die Berührungspuncte von a mit der Hessiana sind, oder was auf dasselbe hinausläuft, mit der parabolischen Curve. Unter den Ebenen, die durch a gelegt sind, gibt es (171) fünf, welche F_3 in einem Kegelschnitt mit Doppelpunct (zwei Gerade ausser a) schneiden; das heisst, *durch jede auf der Fläche gelegene Gerade gehen fünf Tritangentialebenen* (zwei Berührungspuncte auf der Geraden, der dritte ausserhalb). Umgekehrt muss jede Tritangentialebene die Fläche längs dreier Geraden schneiden (eine cubische Curve mit drei Doppelpuncten); also: *Eine beliebige Gerade auf der Fläche trifft* $2.5 = 10$ *andere Gerade* derselben Fläche, und *die Zahl der Tritangentialebenen ist* $\frac{5.27}{3} = 45$.

Sind a, b, c drei Gerade, die in derselben Tritangentialebene liegen, so gehen durch jede solche Gerade vier dreifache Tangentialebenen ausser abc, jede dieser Ebenen enthält zwei neue Gerade, und man erhält so die $3.4.2 = 24$ Geraden, welche mit a, b, c die Zahl 27 vervollständigen.

221. Die neun Geraden, in denen sich die Seitenebenen zweier gegebener Trieder schneiden, bilden die Basis eines Büschels cubischer Flächen, zu denen auch die beiden Trieder gehören. Die Fläche des Büschels, welche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ geht, erhält man auf folgende Weise: Eine beliebig durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene schneidet die neun Geraden in neun Puncten, welche als Durchschnittspuncte der Seiten zweier Dreiecke (Schnitte der beiden Trieder) die Basis eines Curvenbüschels dritter Ordnung bilden. Eine dieser Curven geht durch $\mathfrak{p}$ und *der Ort aller analogen Curven, welche man erhält, wenn man die Ebene um* $\mathfrak{p}$ *dreht, ist* offenbar *die gesuchte cubische*

Fläche. Es seien a_1, b_1, c_{12}; b_3, c_{23}, a_2; c_{31}, a_3, b_1 die Geraden, in denen die erste, zweite, dritte Seitenfläche des ersten Trieders bezüglich die Seitenflächen des zweiten schneidet; oder anders, es seien a_1, b_3, c_{31}; b_2, c_{23}, a_3; c_{12}, a_2, b_1 die Geraden, in welchen bezüglich die erste, zweite, dritte Seitenfläche des zweiten Trieders die Seitenflächen des ersten schneidet; dann können wir folgende Tripel aufstellen

$$a_1, b_1, c_{23};\; a_2, b_2, c_{31};\; a_3, b_3, c_{12};$$
$$b_1, b_2, b_3;\; c_{23}, c_{31}, c_{12};\; a_1, a_2, a_3,$$

in jedem derselben hat man drei Gerade, welche sich nicht schneiden; die drei Geraden a_1, b_1, c_{23} bestimmen ein Hyperboloid, welches die cubische Fläche nochmals längs einer Curve l (dieselbe ist nicht eben) dritter Ordnung schneidet. Eine beliebig durch a_1 gelegte Ebene berührt das Hyperboloid in einem Puncte $\mathfrak{x}$ und die cubische Fläche in zwei Puncten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$. Lässt man die Ebene um a_1 rotieren, so ergeben die Puncte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ eine der einfachen Reihe der Puncte $\mathfrak{x}$ projectivische Involution, und es gibt also drei Fälle, dass ein Punct $\mathfrak{x}$ mit einem der entsprechenden Puncte $\mathfrak{y}$ zusammenfällt. Das heisst: Das Hyperboloid und die cubische Fläche berühren sich in drei Puncten von a_1, ebenso in drei Puncten von b_1 und in drei Puncten von c_{23}. Die Berührungspuncte zweier Flächen sind aber die Doppelpuncte ihrer Schnitte, also schneidet l jede der Geraden a_1, b_1, c_{23} in drei Puncten. Daraus folgt, dass l das System dreier Geraden ist, die a_1, b_1, c_{23} schneiden [1]). Analog schneidet jedes der Hyperboloide, welches den fünf andern Tripeln entspricht, die cubische Fläche in drei neuen Geraden; wir erhalten so $3 \cdot 6 = 18$ Gerade, welche mit den neun Durchschnitten der Seitenflächen der gegebenen Trieder *das System der* 27 *Geraden* bilden.

222. Ein Büschel von Flächen S zweiter Ordnung, dessen Basis eine Curve $\mathfrak{c}$ vierter Ordnung sei, sei einem Büschel von Ebenen E, die sämmtlich durch eine Gerade a gehen, projectivisch. *Der Ort der Kegelschnitte, in denen die Flächen S durch die entsprechenden Ebenen E geschnitten werden, ist* (113) *eine Fläche F_3 dritter Ordnung.* Ihre Durchschnittspuncte mit einer beliebigen Geraden g erhält man auf folgende Weise. Die Gerade g trifft S in zwei Puncten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ und E in einem Puncte $\mathfrak{x}$; die Punctenpaare $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ geben eine der einfachen Reihe der Puncte $\mathfrak{x}$ projectivische Involution und es gibt, also dreimal ein Zusammenfallen eines Punctes $\mathfrak{x}$ mit einem entsprechenden Puncte $\mathfrak{y}$.

Die Fläche F_3 geht durch die Basis der beiden erzeugenden Büschel (113), nämlich durch die Raumcurve $\mathfrak{c}$ und die Gerade a. Jede Ebene E berührt F_3 in zwei Puncten; es sind dies die beiden Puncte, in denen die Gerade a die E entsprechende Fläche S schneidet. Unter den Flächen

---

1) Eine Verallgemeinerung dieses Satzes von Moutard sehe man oben 60. *Anmerkung* 2).

S gibt es zwei, welche a berühren, das heisst, *es gibt zwei Ebenen E, welche stationäre Ebenen sind.* Jede Fläche S berührt F_3 in vier Puncten, nämlich in denjenigen, in welchen die Raumcurve $\mathfrak{c}$ durch die S entsprechende Ebene getroffen wird.

Unter den Ebenen E gibt es fünf (171), *welche die entsprechende Fläche S berühren*; jede dieser Ebenen ist also eine Tangentialebene von F_3 in drei Puncten und schneidet diese Fläche in zwei Geraden ausser a. Indem man von einer beliebigen solchen Tritangentialebene ausgeht, findet man das vollständige System der 27 Geraden wieder, wie oben (220).

223. Wir wollen jetzt voraussetzen, die Ebenen E seien die Polarebenen eines festen Punctes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Quadriflächen S; *dann ist der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen des Büschels und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{p}$ eine cubische Fläche F_3*, welche durch die Basis $\mathfrak{c}$ des Büschels geht und auch durch den Punct $\mathfrak{p}$, wegen derjenigen Quadrifläche S, welche durch $\mathfrak{p}$ geht. Die Ebenen E der Berührungscurven gehen durch ein und dieselbe Gerade a, welche also auf der Fläche F_3 liegt.

In dem Büschel Quadriflächen gibt es vier Kegel, und für jeden derselben zerfällt die Berührungscurve in zwei Gerade, die in einer Ebene durch a liegen. Die Fläche S, die durch $\mathfrak{p}$ geht, wird von der Polarebene von $\mathfrak{p}$ in zwei Geraden geschnitten, die sich in $\mathfrak{p}$ kreuzen, und deren Ebene durch a geht. Wir haben so 10 Gerade erhalten, welche paarweise in Ebenen liegen, welche durch a gehen.

Indem wir die beiden in $\mathfrak{p}$ gekreuzten Geraden betrachten, sehen wir jede in zwei Puncten auf der Raumcurve $\mathfrak{c}$ aufstehen, und durch die Gerade, welche sie verbindet, kann man vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}$ ziehen. Jede dieser Ebenen berührt in demselben Puncte, in dem sie $\mathfrak{c}$ berührt, auch die Fläche F_3, weil die Gerade, welche $\mathfrak{p}$ mit dem Berührungspuncte verbindet, in dem letztern Puncte F_3 berührt, und mit der Tangente von $\mathfrak{c}$ die Tangentialebene von F_3 bestimmt. Jede dieser Ebenen ist also dreifache Tangentialebene und schneidet folglich F_3 in zwei neuen Geraden. Wir erhalten so $2.4.2 = 16$ Gerade, welche mit den 10 schon erhaltenen und mit a zusammen das System der 27 Geraden vervollständigen.

224. Wir wollen ein lineares Ebenensystem dem Systeme der Puncte des Raumes projectivisch nennen, sobald einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}$ eine einzige Ebene X entspricht, und umgekehrt jeder Ebene X ein einziger Punct $\mathfrak{x}$; wenn ferner den Puncten $\mathfrak{x}$ einer Ebene X' die Ebenen X eines Netzes entsprechen, welche durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}'$ gehen, und folglich den Puncten $\mathfrak{x}$ einer Geraden die Ebenen X eines Büschels. Umgekehrt entsprechen den Ebenen X eines Büschels die Puncte $\mathfrak{x}$ einer Geraden, und den Ebenen X, welche durch einen Punct $\mathfrak{x}'$ gehen, die Puncte $\mathfrak{x}$ einer Ebene X'. Die Puncte $\mathfrak{x}'$ und die Ebenen X' bilden zwei neue projectivische Systeme.

Man habe drei lineare Ebenensysteme, die sowohl unter sich als auch mit dem Systeme der Puncte des Raumes projectivisch sind, in der Art, dass jedes der vier homologen Elemente X_1, X_2, X_3, $\mathfrak{x}$ die drei andern eindeutig bestimmt. Es sei $\mathfrak{x}'$ der gemeinschaftliche Punct der drei Ebenen X_1, X_2, X_3, dann bestimmen sich die Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ einer aus dem andern eindeutig; denn wenn $\mathfrak{x}'$ gegeben ist, so geht durch diesen Punct im Allgemeinen ein einziges Tripel entsprechender Ebenen X_1, X_2, X_3, denen ein einziger Punct $\mathfrak{x}$ entspricht (er entsteht durch den Durchschnitt der drei Ebenen X'_1, X'_2, X'_3, welche dem Puncte $\mathfrak{x}'$ entsprechen). *Man kann $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ als homologe Puncte zweier projectivischer Räume auffassen,* und wir wollen die Curven und Flächen zu bestimmen suchen, welche in einem dieser Räume den Geraden und Ebenen des andern ensprechen.

Durchläuft $\mathfrak{x}$ eine Ebene E, so erzeugt jede der Ebenen X ein Netz; man erhält so drei projectivische Netze, von denen drei entsprechende Ebenen sich in $\mathfrak{x}'$ schneiden. Der Ort von $\mathfrak{x}'$ ist also (127) eine Fläche F_3 dritter Ordnung. Daraus folgt, *dass die Puncte dieser Fläche einzeln den Puncten der Ebene E entsprechen.*

Alle cubischen Flächen F_3, entsprechend den Ebenen E des ersten Raumes, bilden ein lineares System und gehen durch dieselbe Raumcurve k der sechsten Ordnung (136), *Ort eines Punctes, durch welchen drei entsprechende Büschel von Ebenen X hindurchgehen. Also entspricht einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}'$ von k anstatt eines einfachen Punctes $\mathfrak{x}$ eine Gerade x.*

Beschreibt $\mathfrak{x}$ eine Gerade, dann bilden die Ebenen X drei projectivische Büschel; folglich (122), *ist der Ort von $\mathfrak{x}'$ eine cubische Raumcurve.* Diese Curve bildet mit k zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen F_3, welche zwei Ebenen E entsprechen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

Eine Gerade und eine Ebene des ersten Raumes haben einen Punct $\mathfrak{x}$ gemein; der Punct $\mathfrak{x}'$, welcher ihm entspricht, muss auch auf eine einzige Weise aus dem Durchschnitte der Curve und der Fläche, welche bezüglich der Geraden und der Ebene entsprechen, sich ergeben. Diese Curve und Fläche sind aber beide von der dritten Ordnung, und haben also neun Puncte gemein. Von ihnen gehören (121) acht der Curve k an, und der neunte ist $\mathfrak{x}'$.

Daraus, dass die cubische Raumcurve, die einer beliebigen Geraden entspricht, k achtmal trifft, folgt, dass diese Gerade von allen Geraden x getroffen wird, welche den acht Puncten $\mathfrak{x}'$ von k entsprechen. Das heisst, *die Geraden x des ersten Raumes, welche den Puncten der Raumcurve k entsprechen, bilden eine Fläche achten Grades.*

Drei Ebenen E schneiden sich in einem Puncte $\mathfrak{x}$, also haben drei Flächen F_3 ausser der Curve k nur noch einen einzigen Punct $\mathfrak{x}'$ gemein.

Umgekehrt: Beschreibt der Punct $\mathfrak{x}'$ im zweiten Raume eine Gerade, so erzeugt der Punct $\mathfrak{x}$ eine cubische Raumcurve, denn der Ort von $\mathfrak{x}$ wird von einer willkürlichen Ebene E in ebensovielen Puncten getroffen, als die gegebene Gerade mit der Fläche F_3 Durchschnittspuncte hat, welche dieser

Ebene entspricht. Ist $\mathfrak{x}'$ auf einer Ebene E variabel, so erzeugt $\mathfrak{x}$ eine cubische Fläche F'_3; in der That wird der Ort von $\mathfrak{x}$ durch eine beliebige Gerade in den Puncten getroffen, welche den Durchschnittspuncten der Ebene E' mit der Curve entsprechen, welche dieser Geraden entspricht. Und sobald der Punct $\mathfrak{x}$ der Durchschnitt dreier homologer Ebenen X'_1, X'_2, X'_3 dreier zu dem Systeme der Puncte $\mathfrak{x}'$ des zweiten Raumes projectivischer Systeme ist, so folgt, dass F'_3 als Ort der Puncte $\mathfrak{x}$ construiert werden kann, die drei entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Netze gemein sind. Folglich bilden die Flächen F'_3, welche den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen, selbst ein lineares System und gehen durch ein und dieselbe Raumcurve k' sechster Ordnung. Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ derselben entsprechen die Puncte $\mathfrak{x}'$ einer Geraden x' [1]).

225. Es sei $\mathfrak{x}'$ ein Punct von k, der allen Ebenen X_1, X_2, X_3 dreier entsprechender Büschel gemein sei, deren Axen a_1, a_2, a_3 sein mögen; und es sei x die Gerade, welche die diesen Ebenen entsprechenden Puncte $\mathfrak{x}$ enthält, das heisst die gemeinsame Gerade der Ebenen X'_1, X'_2, X'_3, welche $\mathfrak{x}'$ entsprechen. Jedes Tripel homologer Ebenen, die bezüglich durch a_1, a_2, a_3 gezogen sind, entspricht einem Puncte $\mathfrak{x}$ von x, in der Art, dass der auf x variable Punct $\mathfrak{x}$ stets den festen Punct $\mathfrak{x}'$ als homologen Punct hat; unter diesen Tripeln gibt es aber drei, von denen jedes aus drei Ebenen durch ein und dieselbe Gerade besteht. In der That, der durch die projectivischen Büschel $(a_1), (a_2)$ erzeugte Kegel (151), und der Kegel, welcher in analoger Weise durch die $(a_1), (a_3)$ erzeugt wird, haben drei Gerade gemein ausser der gemeinschaftlichen Axe a_1; jede derselben ist folglich der Durchschnitt dreier entsprechender Ebenen X_1, X_2, X_3. Also besitzt x drei Puncte, von denen jeder einer Geraden entspricht, die durch $\mathfrak{x}'$ geht, oder mit andern Worten, x steht auf k' in drei Puncten auf, denen drei Gerade x' die durch $\mathfrak{x}$ gehen, entsprechen. Analog findet man: *Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ von k' entspricht eine Gerade x', die auf k in drei Puncten aufsteht, und die Geraden x, welche diesen Puncten entsprechen, kreuzen sich in $\mathfrak{x}$.* Das heisst: *Trifft eine Gerade die Curve k in drei Puncten, so gehen die drei Geraden, welche diesen Puncten entsprechen, durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}$ von k' und bilden für sich allein die der gegebenen Geraden entsprechende cubische Curve, in der Art, dass jedem andern Puncte derselben der feste Punct $\mathfrak{x}$ entspricht.*

Beschreibt der Punct $\mathfrak{x}'$ eine Gerade g, so geben die Ebenen X'_1, X'_2, X'_3

---

[1]) In dem speciellen Falle, dass X_1, X_2, X_3 die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{x}$ in Bezug auf drei feste Quadriflächen sind, haben die Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ eine völlig reciproke (*involutorische*) Beziehung, und einer Ebene E entspricht, zu welchem Raume man sie auch als angehörend betrachtet, eine einzige Fläche F_3, Ort der Pole der Ebene E in Bezug auf die Flächen des durch die drei gegebenen Quadriflächen bestimmten Netzes (128). Unter dieser Bedingung fallen auch die Curven k, k' zusammen, und es würde unnütz sein, die beiden Räume zu unterscheiden.

drei projectivischen Büscheln Entstehung, und folglich ist der Ort von $\mathfrak{x}$, wie wir es schon oben (224) bewiesen haben, eine cubische Raumcurve, die den drei Hyperboloiden gemein ist, welche die drei Büschel zu zwei und zwei genommen erzeugen. Diese Curve zerlegt sich: 1. in einen Kegelschnitt und eine Gerade x, sobald g die Curve k einmal trifft; 2. in drei Gerade (zwei derselben x_1, x_2, die sich nicht schneiden, werden durch die dritte geschnitten), sobald g die Curve k zweimal trifft; 3. in drei Gerade x_1, x_2, x_3 (von demselben Puncte von k' ausgehend), wenn g die Curve k dreimal schneidet. Abstrahieren wir von den Geraden x, welche den Puncten von k entsprechen, so können wir sagen, *dass der Geraden g eine cubische Raumcurve, ein Kegelschnitt, eine Gerade oder ein Punct entspricht, je nachdem g mit k* 0, 1, 2, 3 *Puncte gemein hat.*

Hieraus folgt, dass g, wenn sie auf der Fläche F_3 liegt, k wenigstens einmal trifft, da die g entsprechende Linie auf der Ebene E liegen muss, welche F_3 entspricht. Also: *Betrachtet man drei Gerade, die in derselben dreifachen Tangentialebene von F_3 liegen, so können nur folgende zwei Fälle eintreten: entweder treffen die drei Geraden k in je* 2 *Puncten, oder sie treffen diese Curve bezüglich in* 1, 2, 3 *Puncten.*

226. Es sei F_3 die cubische Fläche, welche einer gegebenen Ebene E entspricht; diese Ebene schneidet die Raumcurve k' in sechs Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$, welche wir *Fundamentalpuncte* nennen wollen. Betrachten wir nun diese Puncte als ebensoviele Lagen von $\mathfrak{x}$, *so liegen die sechs entsprechenden Geraden $x' = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$* (Orte der homologen Puncte $\mathfrak{x}'$) *auf F_3 und stehen jede auf k in drei Puncten auf.* Man sieht auch leicht, dass den verschiedenen Puncten der Geraden a_ρ die Puncte der Ebene E entsprechen, welche dem Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_\rho$ unendlich nahe sind, das heisst, dass die Reihe der Puncte $\mathfrak{x}'$ auf a_ρ dem Büschel von Geraden projectivisch ist, welche in der Ebene E durch $\mathfrak{a}_\rho$ gehen.

Die übrigen Geraden von F_3 treffen k entweder in zwei oder in einem Puncte, und entsprechen also bezüglich geraden Linien oder Kegelschnitten in der Ebene E (225). Im ersten Falle muss die Gerade in E ebenfalls zweimal k' treffen. Nun gibt es in der Ebene E fünfzehn Gerade, die mit dieser Raumcurve zwei Puncte gemein haben, nämlich:

$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_6$

und *F_3 enthält also auch fünfzehn Gerade:*

$c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{56}, c_{64}, c_{45}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{34}, c_{35}, c_{36},$

von denen jede auf k in zwei Puncten aufsteht.

Die Geraden a_ρ und $c_{\rho\sigma}$ (wo ρ, σ die Indices zweier Fundamentalpuncte sind) treffen sich in einem Puncte, welcher der Richtung $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$, die von $\mathfrak{a}_\rho$ ausgeht, angehört; die Ebene dieser Geraden, trifft folglich F_3 in einer dritten Geraden, die nur einen einzigen Punct mit k gemein hat; wir wollen sie durch b_σ bezeichnen. Dieselbe Ebene trifft die sechs Geraden a, von denen

zwei, a_ρ, a_σ, durch $c_{\rho\sigma}$ geschnitten werden, da die entsprechende Gerade durch die Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ geht; folglich wird b_σ ausser a_ρ noch vier andere Gerade mit Ausnahme von a_σ schneiden. Daraus folgt, dass der b_σ entsprechende Kegelschnitt durch fünf Fundamentalpuncte geht, mit Ausnahme von $\mathfrak{a}_\sigma$. Also *enthält F_3 sechs neue Gerade*

$$b_1, \qquad b_2, \qquad b_3, \qquad b_4, \qquad b_5, \qquad b_6$$

die k nur in je einem Puncte treffen, und den Kegelschnitten

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

entsprechen, welche man durch die Fundamentalpuncte zu je fünf genommen beschreiben kann.

227. Das sind also die 27 Geraden der Fläche F_3. Nach dem Vorhergehenden (225) enthält jede dreifache Tangentialebene entweder eine Gerade a, eine Gerade b und eine Gerade c oder drei Gerade c, und folglich liegen zwei Gerade a oder zwei Gerade b niemals in ein und derselben Ebene.

Trifft eine Gerade b oder c die Gerade a_ρ, so muss der entsprechende Kegelschnitt von b oder die entsprechende Gerade von c durch den Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$ gehen. Also treffen sich zwei Gerade a_ρ, b_σ immer, sobald die Indices ρ, σ verschieden sind, und treffen sich nicht, wenn sie denselben Index haben. Jede Gerade a_ρ trifft ausser den fünf Geraden b mit anderm Index die fünf Geraden $c_{\rho\sigma}$, welche einen Index haben, der gleich ρ ist.

Haben zwei Linien auf E einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{x}$, so haben die entsprechenden Linien auf F_3 den homologen Punct $\mathfrak{x}'$ gemein; gehen aber die ersten Linien zugleich durch einen Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$, so zeigt das nur an, dass die Linien auf F_3 beide durch die Gerade a_ρ in den Puncten getroffen werden, welche den Richtungen der ersten Linien im Puncte $\mathfrak{a}_\rho$ entsprechen.

Es folgt hieraus, dass zwei Gerade c, und ebenso eine Gerade b und eine Gerade c sich treffen, wenn die entsprechenden Linien einen von den sechs Fundamentalpuncten verschiedenen Durchschnittspunct haben. *Die Gerade b_ρ trifft also alle Geraden c die einen Index ρ haben; und zwei Gerade c schneiden sich, wenn alle Indices derselben verschieden sind.*

Es ist jetzt sehr leicht, die 45 Combinationen von je drei Geraden zu finden, welche in derselben Ebene liegen. *Die Ebene, welche durch a_ρ und b_σ geht, enthält auch $c_{\rho\sigma}$, und letztere Gerade liegt auch in der Ebene $a_\sigma b_\rho$,* denn die Symbole $c_{\rho\sigma}$ und $c_{\sigma\rho}$ drücken ein und dieselbe Gerade aus, nämlich die, welche der Geraden entspricht, die durch die Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ geht. *Endlich sind drei Gerade c in einer Ebene, wenn ihre Indices alle sechs Zahlen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *enthalten.*

Wir geben hier eine Zusammenstellung der fünfundvierzig Tripel von Geraden, welche in den dreifachen Tangentialebenen liegen.

$a_1 b_2 c_{12}$	$a_2 b_1 c_{21}$	$a_3 b_1 c_{31}$	$a_4 b_1 c_{41}$	$a_5 b_1 c_{51}$	$a_6 b_1 c_{61}$
$a_1 b_3 c_{13}$	$a_2 b_3 c_{23}$	$a_3 b_2 c_{32}$	$a_4 b_2 c_{42}$	$a_5 b_2 c_{52}$	$a_6 b_2 c_{62}$
$a_1 b_4 c_{14}$	$a_2 b_4 c_{24}$	$a_3 b_4 c_{34}$	$a_4 b_3 c_{43}$	$a_5 b_3 c_{53}$	$a_6 b_3 c_{63}$
$a_1 b_5 c_{15}$	$a_2 b_5 c_{25}$	$a_3 b_5 c_{35}$	$a_4 b_5 c_{45}$	$a_5 b_4 c_{54}$	$a_6 b_4 c_{64}$
$a_1 b_6 c_{16}$	$a_2 b_6 c_{26}$	$a_3 b_6 c_{36}$	$a_4 b_6 c_{46}$	$a_5 b_6 c_{56}$	$a_6 b_5 c_{65}$

$c_{12} c_{34} c_{56}$	$c_{13} c_{24} c_{56}$	$c_{14} c_{23} c_{56}$	$c_{15} c_{23} c_{46}$	$c_{16} c_{23} c_{45}$
$c_{12} c_{35} c_{46}$	$c_{13} c_{25} c_{46}$	$c_{14} c_{25} c_{36}$	$c_{15} c_{24} c_{36}$	$c_{16} c_{24} c_{35}$
$c_{12} c_{36} c_{45}$	$c_{13} c_{26} c_{45}$	$c_{14} c_{26} c_{35}$	$c_{15} c_{26} c_{34}$	$c_{16} c_{25} c_{34}$.

228. Man zieht hieraus mehrere interessante Bemerkungen. Zum Beispiel: *Zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen,* wie a_1, b_1, *werden von den nämlichen fünf Geraden geschnitten* ($c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$). Unter den andern zwanzig Geraden gibt es fünf, welche nur a_1 schneiden, fünf, welche nur b_1 schneiden, und zehn, welche weder die eine noch die andere Gerade a_1, b_1 treffen.

Drei Gerade, welche sich nicht schneiden, wie a_1, a_2, a_3, *werden durch die nämlichen drei Geraden* (b_4, b_5, b_6) *getroffen,* und es gibt sechs Gerade ($a_4, a_5, a_6, c_{56}, c_{64}, c_{45}$), welche weder a_1 noch a_2 noch a_3 schneiden.

Vier Gerade, welche sich nicht schneiden, wie a_1, a_2, a_3, a_4, *werden von zwei Geraden getroffen* (b_5, b_6), *und werden von drei Geraden nicht geschnitten* (a_5, a_6, c_{56}).

Zwei Systeme von je sechs Geraden, wie

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,$$

in denen je zwei homologe Gerade sich nicht schneiden und zwei nicht homologe Gerade sich stets schneiden, bilden das, was man nach Schläfli [1]), ein *Doppelsechs* nennt. *Fünf Gerade,* wie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, *welche demselben Sechstupel angehören, werden von einer einzigen Geraden* (b_6) *geschnitten* und eine andere Gerade (a_6) trifft sie nicht. Aber *fünf Gerade, welche, ohne sich zu schneiden, nicht demselben Sechstupel angehören,* wie $a_1, a_2, a_3, a_4, c_{56}$, *werden von zwei Geraden* (b_5, b_6) *geschnitten,* und es gibt keine Gerade, welche nicht eine oder die andere dieser fünf Geraden schnitte.

229. Die Erzeugungsweise, welcher wir uns für die Fläche F_3 bedient haben, hat uns ganz natürlich auf das *Doppelsechs* geführt, welches aus den

1) *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order etc.* (Quarterly Journal of Mathematics. T. II., 1858).

Geraden a, b gebildet ist. Man kann aber die 27 Geraden noch auf andere Weise verbinden, um dadurch ein Doppelsechs zu bilden. *Ein Doppelsechs ist durch zwei homologe Gerade,* wie a_1, b_1, *bestimmt,* denn die fünf Geraden, welche b_1 schneiden ohne a_1 zu treffen, und die fünf Geraden, welche a_1 treffen ohne b_1 zu schneiden, vervollständigen die beiden Sechstupel des Doppelsechs. Daraus lässt sich die Zahl der Doppelsechs ableiten, die man aus den 27 Geraden bilden kann. Jede dieser Geraden wird von sechszehn andern Geraden nicht getroffen; es gibt also $\frac{27.16}{2}$ Geradenpaare, welche sich nicht treffen. Jedes Paar bestimmt ein Doppelsechs; jedes Doppelsechs enthält aber sechs homologe Geradenpaare; *also ist die Zahl der Doppelsechs gleich* $\frac{27.16}{2.6} = 36$. Hier eine Tabelle dieser sechsunddreissig Doppelsechs:

$a_1 b_1 c_{23} c_{24} c_{25} c_{26}$ $a_2 b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16}$	$a_1 b_1 c_{32} c_{34} c_{35} c_{36}$ $a_3 b_3 c_{12} c_{14} c_{15} c_{16}$	$a_1 b_1 c_{42} c_{43} c_{45} c_{46}$ $a_4 b_4 c_{12} c_{13} c_{15} c_{16}$	$a_1 b_1 c_{52} c_{53} c_{54} c_{56}$ $a_5 b_5 c_{12} c_{13} c_{14} c_{16}$	$a_1 b_1 c_{62} c_{63} c_{64} c_{65}$ $a_6 b_6 c_{12} c_{13} c_{14} c_{15}$	$a_2 b_2 c_{31} c_{34} c_{35} c_{36}$ $a_3 b_3 c_{21} c_{24} c_{25} c_{26}$
$a_2 b_2 c_{41} c_{43} c_{45} c_{46}$ $a_4 b_4 c_{21} c_{23} c_{25} c_{26}$	$a_2 b_2 c_{51} c_{53} c_{54} c_{56}$ $a_5 b_5 c_{21} c_{23} c_{24} c_{26}$	$a_2 b_2 c_{61} c_{63} c_{64} c_{65}$ $a_6 b_6 c_{21} c_{23} c_{24} c_{25}$	$a_3 b_3 c_{41} c_{42} c_{45} c_{46}$ $a_4 b_4 c_{31} c_{32} c_{34} c_{36}$	$a_3 b_3 c_{51} c_{52} c_{54} c_{56}$ $a_5 b_5 c_{31} c_{32} c_{34} c_{36}$	$a_3 b_3 c_{61} c_{62} c_{64} c_{65}$ $a_6 b_6 c_{31} c_{32} c_{34} c_{35}$
$a_4 b_4 c_{51} c_{52} c_{53} c_{56}$ $a_5 b_5 c_{41} c_{42} c_{43} c_{46}$	$a_4 b_4 c_{61} c_{62} c_{63} c_{65}$ $a_6 b_6 c_{41} c_{42} c_{43} c_{45}$	$a_5 b_5 c_{61} c_{62} c_{63} c_{64}$ $a_6 b_6 c_{51} c_{52} c_{53} c_{54}$	$a_1 a_2 a_3 c_{56} c_{64} c_{45}$ $c_{23} c_{31} c_{12} b_4 b_5 b_6$	$a_1 a_2 a_4 c_{56} c_{63} c_{35}$ $c_{24} c_{41} c_{12} b_3 b_5 b_6$	$a_1 a_2 a_5 c_{46} c_{63} c_{34}$ $c_{25} c_{51} c_{12} b_3 b_4 b_6$
$a_1 a_2 a_6 c_{45} c_{53} c_{34}$ $c_{26} c_{61} c_{12} b_3 b_4 b_5$	$a_1 a_3 a_4 c_{56} c_{62} c_{25}$ $c_{34} c_{41} c_{31} b_2 b_5 b_6$	$a_1 a_3 a_5 c_{46} c_{62} c_{24}$ $c_{35} c_{51} c_{13} b_2 b_4 b_6$	$a_1 a_3 a_6 c_{45} c_{52} c_{24}$ $c_{36} c_{61} c_{31} b_2 b_4 b_5$	$a_1 a_4 a_5 c_{36} c_{62} c_{23}$ $c_{45} c_{51} c_{14} b_2 b_3 b_6$	$a_1 a_4 a_6 c_{35} c_{52} c_{23}$ $c_{46} c_{61} c_{14} b_2 b_3 b_5$
$a_1 a_5 a_6 c_{34} c_{42} c_{23}$ $c_{56} c_{61} c_{15} b_2 b_3 b_4$	$a_2 a_3 a_4 c_{56} c_{61} c_{15}$ $c_{34} c_{42} c_{23} b_1 b_5 b_6$	$a_2 a_3 a_5 c_{46} c_{61} c_{14}$ $c_{53} c_{52} c_{23} b_1 b_4 b_6$	$a_2 a_3 a_6 c_{45} c_{51} c_{14}$ $c_{36} c_{62} c_{23} b_1 b_4 b_5$	$a_2 a_4 a_5 c_{36} c_{61} c_{13}$ $c_{45} c_{52} c_{24} b_1 b_3 b_6$	$a_2 a_4 a_6 c_{35} c_{51} c_{13}$ $c_{46} c_{62} c_{24} b_1 b_3 b_5$
$a_2 a_5 a_6 c_{34} c_{41} c_{13}$ $c_{56} c_{62} c_{25} b_1 b_3 b_4$	$a_3 a_4 a_5 c_{16} c_{62} c_{21}$ $c_{45} c_{53} c_{34} b_2 b_1 b_6$	$a_3 a_4 a_6 c_{25} c_{51} c_{12}$ $c_{46} c_{63} c_{34} b_1 b_2 b_5$	$a_3 a_5 a_6 c_{24} c_{41} c_{12}$ $c_{56} c_{63} c_{35} b_1 b_2 b_4$	$a_4 a_5 a_6 c_{23} c_{31} c_{12}$ $c_{56} c_{64} c_{45} b_1 b_2 b_3$	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$

230. Wir haben gesehen, dass der Ort des drei entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Netze von Ebenen gemeinschaftlichen Punctes eine Fläche dritter Ordnung ist, deren Puncte einzeln den Puncten einer festen Ebene entsprechen. Umgekehrt kann man beweisen, dass *eine beliebige* (allgemeine) *Fläche F_3 dritter Ordnung durch drei projectivische Ebenennetze erzeugt werden kann* (und zwar auf unendlich viel verschiedene Arten) [1]).

Seien a_1, a_2, a_3 drei Gerade der gegebenen Fläche F_3, die sich nicht schneiden (221). Eine beliebig durch a_1 gezogene Ebene A_1, und eine zweite Ebene A_2 durch a_2 gezogen, treffen F_3 in zwei Kegelschnitten, die einen Punct gemein haben, (denn die Puncte, in welchen die Gerade $A_1 A_2$ die beiden Kegelschnitte schneidet, müssen die drei Durchschnittspuncte dieser Geraden mit F_3 darstellen); durch diesen Punct und durch a_3 legen wir eine Ebene A_3. Man erhält so drei Ebenenbüschel, welche unter sich diejenige Beziehung haben, welche August [2]) *duploprojectivisch* nennt; das heisst: Nimmt man in zwei Büscheln beliebig je eine Ebene an, so ist die entsprechende Ebene des dritten Büschels auf eine einzige Art bestimmt. Die Fläche F_3 ist der Ort des drei entsprechenden Ebenen gemeinsamen Punctes.

Eine Tritangentialebene, die durch a_1 gelegt ist, trifft a_2 und a_3 in zwei Puncten, welche den beiden Geraden der Fläche F_3 angehören, welche die Ebene ausser a_1 enthält. Es gibt nun zwei mögliche Fälle: Entweder die dreifache Tangentialebene enthält eine Gerade, welche a_2 und a_3 schneidet, und eine andere, welche weder a_2 noch a_3 trifft; oder aber sie enthält zwei Gerade, deren eine a_2 schneidet und die andere a_3. Es gibt (221) drei Gerade, welche a_1, a_2 und a_3 schneiden, also ist die Zahl der Ebenen zweiter Art gleich *zwei*. Es seien b_3, c_{13}; c_{12}, b_2 die in diesen Ebenen enthaltenen Geraden, und zwar seien b_3, c_{12} durch a_2 geschnitten und die andern durch a_3. Die Geraden b_2, a_3 treffen b_3, a_2 nicht, und es liegt also die Gerade c_{23}, welche den Ebenen $b_2 a_3$, $b_3 a_2$ gemein ist, auf der Fläche. Ebenso treffen sich die Ebenen $c_{12} a_2$, $c_{13} a_3$ in einer Geraden b_1 der Fläche. Man bezeichne die sechs Ebenen

$$a_1 b_2 c_{12},\ \ a_1 b_3 c_{13};\ \ a_2 b_3 c_{23},\ \ a_2 b_1 c_{12};\ \ a_3 b_1 c_{13},\ \ a_3 b_2 c_{23}$$

bezüglich durch die Buchstaben

$$\mathcal{A}_1,\quad \mathcal{A}'_1;\quad \mathcal{A}_2,\quad \mathcal{A}'_2;\quad \mathcal{A}_3,\quad \mathcal{A}'_3.$$

Den Ebenen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}'_2$ entspricht (bei duploprojectivischer Beziehung) eine unbestimmte Ebene durch a_3, denn diese beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden der Fläche. Ebenso entspricht den Ebenen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}'_3$ eine beliebige Ebene durch a_2; u. s. w.

---

1) Man abstrahiert hierbei von der Realität der in Betracht kommenden Elemente.

2) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissert. inaug.; Berolini 1862).

Es sei E eine feste Ebene und $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{nl}$, $\mathfrak{lm}$ drei in dieser Ebene gezogene Gerade. Man nehme an, die Gerade $\mathfrak{mn}$ sei dem Büschel (a_1), d. h. dem Büschel, dessen Axe a_1 ist, projectivisch (homographisch) getheilt, in der Art, dass den Puncten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{l}_0$ die drei Ebenen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_1$, A^0_1 entsprechen; ebenso sei die Gerade $\mathfrak{nl}$ dem Büschel (a_2) so projectivisch getheilt, dass den Puncten $\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}_0$ die Ebenen $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_2$, A^0_2 entsprechen; und die Gerade $\mathfrak{lm}$ so projectivisch dem Büschel (a_3), dass die Puncte $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}_0$ den Ebenen $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}'_3$, A^0_3 entsprechen, und man nehme ausserdem noch an, dass die Ebenen A^0_1, A^0_2, A^0_3 in der duploprojectivischen Beziehung sich entsprechen (das heisst, dass sie sich in einem Puncte $\mathfrak{x}'_0$ von F_3 schneiden), und dass die Geraden $\mathfrak{ll}_0$, $\mathfrak{mm}_0$, $\mathfrak{nn}_0$ in demselben Puncte $\mathfrak{x}_0$ von E zusammenlaufen.

Nun gibt ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ der Ebene E mit den Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ verbunden drei neuen Geraden Entstehung, welche $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{nl}$, $\mathfrak{lm}$ in drei neuen Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ treffen; diesen Puncten entsprechen dann in den Büscheln $(a_1), (a_2), (a_3)$ drei Ebenen A_1, A_2, A_3, deren gemeinsamer Durchschnittspunct $\mathfrak{x}'$ sei. Was ist dann der Ort des Punctes $\mathfrak{x}'$?

Wenn $\mathfrak{i}$ ein beliebiger Punct einer willkürlich im Raume angenommenen Geraden ist, so kann man durch diesen Punct eine Ebene des Büschels (a_1) und eine des Büschels (a_2) legen. Die entsprechende Ebene des dritten Büschels schneidet dann die willkürliche Gerade in einem Puncte $\mathfrak{i}'$. Nimmt man aber umgekehrt auf dieser Geraden beliebig den Punct $\mathfrak{i}'$ an, und lässt dadurch eine Ebene des dritten Büschels gehen, so bestimmen die Ebenenpaare der beiden andern Büschel, welche man als entsprechend betrachten kann, auf den Geraden zwei homographischer Punctreihen. Jeder der beiden sich selbst entsprechenden Puncte dieser Reihen ist ein Punct $\mathfrak{i}$, durch den je zwei Ebenen der Büschel (a_1) und (a_2) gehen, entsprechend der durch $\mathfrak{i}'$ gelegten Ebene des dritten Büschels. Auf der willkürlichen Geraden gibt es danach dreimal den Fall, dass ein Punct $\mathfrak{i}$ mit einem Puncte $\mathfrak{i}'$ zusammentrifft, das heisst drei Puncte des Ortes; mit andern Worten, der Ort des Punctes $\mathfrak{x}'$ ist eine Fläche dritter Ordnung.

Diese Fläche geht durch die drei Geraden a_1, a_2, a_3, die Axen der drei duploprojectivischen Büschel, denn jeder Punct dieser Geraden liegt offenbar in drei entsprechenden Ebenen. Aber das ist noch nicht genug. Wenn die Puncte $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ bezüglich die Lagen $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ annehmen, so wird der Punct $\mathfrak{n}$ unbestimmt. Nun entsprechen den Puncten $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{mn}$ und $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{nl}$ die Ebenen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_2$ der Büschel (a_1), (a_2), also ist die Ebene des dritten Büschels, welche diesen Ebenen entspricht, unbestimmt. Daraus schliesst man, dass die Gerade c_{12}, die den Ebenen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_2$ gemein ist, vollständig auf dem Orte von $\mathfrak{x}'$ liegt. Das nämliche Raisonnement besteht für die andern Geraden in denen die Ebenen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ die Ebenen $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_3$ treffen. Der Ort von $\mathfrak{x}'$ und die gegebene Fläche haben also neun Gerade und einen Punct $\mathfrak{x}'_0$ gemein, das heisst, der Ort von $\mathfrak{x}'$ fällt mit der Fläche F_3 zusammen.

Einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}$ der Ebene E entspricht auf diese Weise ein Punct von F_3. Umgekehrt bestimmt ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}'$ dieser Fläche drei Ebenen

$$\mathfrak{x}'a_1 \equiv A_1, \mathfrak{x}'a_2 \equiv A_2, \mathfrak{x}'a_3 \equiv A_3,$$

denen drei Puncte auf $\mathfrak{mn}, \mathfrak{nl}, \mathfrak{lm}$ entsprechen. Diese Puncte bezüglich mit $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ verbunden geben drei im Puncte $\mathfrak{x}$ zusammenlaufende Gerade.

Man betrachte die drei Tripel correspondierender Ebenen

$$\begin{array}{ll} (a_1) & A_1, A'_1, A''_1; \\ (a_2) & A_2, A'_2, A''_2; \\ (a_3) & A_3, A'_3, A''_3, \end{array}$$

von denen jedes durch die beiden andern, die willkürlich bleiben, bestimmt ist. Sind aber diese Tripel einmal gewählt und festgelegt, so kann man sie als drei projectivische Netze bestimmend ansehen, worin der eigenthümliche Umstand statt hat, dass die Ebenen eines Netzes eine Gerade gemein haben, anstatt einen einfachen Punct. Mit andern Worten ist A'''_1 eine neue willkürliche Ebene durch a_1 und man bestimmt die Ebenen A'''_2, A'''_3 in der Art, dass die Gruppen

$$A_1A'_1A''_1A'''_1,\ A_2A'_2A''_2A'''_2,\ A_3A'_3A''_3A'''_3$$

projectivisch sind, so behaupte ich, dass A'''_3 genau die Ebene des dritten Büschels ist, welche den Ebenen A'''_1, A'''_2 in der duploprojectivischen Beziehung entspricht. In der That, die Geraden jedes der Tripel von Geraden

$$(\mathfrak{ll}, \mathfrak{mm}, \mathfrak{nn}),\ (\mathfrak{ll}', \mathfrak{mm}', \mathfrak{nn}'),\ (\mathfrak{ll}'', \mathfrak{mm}'', \mathfrak{nn}'')$$

laufen in einem Puncte auf der Ebene E zusammen, und die drei Gruppen von je vier Geraden

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}'', \mathfrak{l}'''),\ \mathfrak{m}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \mathfrak{m}'''),\ \mathfrak{n}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \mathfrak{n}'', \mathfrak{n}''')$$

haben dasselbe Doppelverhältniss, weil sie drei Gruppen von Ebenen A projectivisch sind, also schneiden sich die drei Geraden $\mathfrak{ll}''', \mathfrak{mm}''', \mathfrak{nn}'''$ in demselben Puncte, und folglich gehen die Ebenen A'''_1, A'''_2, A'''_3 durch denselben Punct der Fläche F_3, das heisst, es sind drei entsprechende Ebenen in den duploprojectivischen Büscheln.

Nachdem wir so die drei duploprojectivischen Büschel in drei projectivische Büschel umgesetzt haben, als Specialfall dreier projectivischer Netze, können wir auf sie die früher auseinandergesetzte Methode (154) in Anwendung bringen; das heisst, wir können, ohne die erzeugte Fläche zu verändern, den projectivischen Reihen

$$\begin{array}{l} A_1, A'_1, A''_1, \ldots. \\ A_2, A'_2, A''_2, \ldots. \\ A_3, A'_3, A''_3, \ldots. \end{array}$$

die projectivischen Netze unterschieben:

$$\begin{array}{l} A_1, \ A_2, \ A_3, \ \ldots, \ P, \ \ldots \\ A'_1, \ A'_2, \ A'_3, \ \ldots, \ P', \ldots \\ A''_1, \ A''_2, \ A''_3, \ \ldots, \ P'', \ldots \end{array}$$

worin drei entsprechende Ebenen im Allgemeinen nicht mehr als einen einzigen Punct gemein haben (dessen Ort die vorgelegte Fläche ist). Aber es gibt sechs Tripel von entsprechenden Ebenen (wie A_1, A'_2, A''_3), welche durch eine Gerade gehen [1]).

Auch hier können wir wieder die Puncte der Fläche einzeln den Puncten einer beliebig gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ entsprechen lassen. Dazu genügt nämlich die Herstellung einer projectivischen (reciproken) Beziehung zwischen den Puncten der Ebene $\mathcal{E}$ und den Ebenen eines der drei Netze, in der Art, dass einem Puncte von $\mathcal{E}$ eine Ebene des Netzes und den Puncten einer Geraden auf $\mathcal{E}$ die Ebenen eines Büschels in dem Netze entsprechen, und umgekehrt. Jedem beliebigen Puncte von $\mathcal{E}$ entspricht nun eine Ebene in jedem Netze und folglich ein Punct von F_3, und umgekehrt.

CAPITEL IV.

ABBILDUNG EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG AUF EINER EBENE.

231. Wir haben eben (230) bewiesen, dass jede allgemeine Fläche dritter Ordnung F_3 auf einer gegebenen Ebene E in der Art abgebildet werden kann, dass die Puncte $\mathfrak{x}$ von E und die Puncte $\mathfrak{x}'$ von F_3 sich eindeutig entsprechen. Daraus folgt aber, *dass man auf der Ebene die Geometrie der Linien studieren kann, die auf einer Fläche dritter Ordnung gezogen sind.*

Bei dieser Abbildung entsprechen den 27 Geraden von F_3 auf E: 1. sechs Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$, die wir *Fundamentalpuncte* genannt haben; 2. die sechs Kegelschnitte, welche man durch je fünf der Fundamentalpuncte legen kann; 3. die fünfzehn Geraden, welche die Fundamentalpuncte zu zwei und zwei verbinden. Die Geraden a, welche den sechs Puncten, und die Geraden b, welche den sechs Kegelschnitten entsprechen, bilden die beiden Sechstupel eines Doppelsechs (227).

---

1) Man beweist dies durch die oben (224) angewendeten Betrachtungen oder auch mittelst der Methode, welche Schroeter in seiner Abhandlung über die 27 Geraden benutzt hat (*Nachweiss der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.* Crelles Journal, Bd. 63; 1863).

Wir wollen nun versuchen, wenigstens in den interessantesten Fällen, folgende beiden Fragen aufzulösen: 1. die Natur der Plancurve zu finden, welche einer gegebenen Curve auf F_3 entspricht; 2. zu bestimmen, welche Curve auf F_3 einer gegebenen Plancurve entspricht.

232. Einer beliebigen Ebene $\mathfrak{E}'$ entspricht eine Fläche $\mathfrak{F}'_3$ dritter Ordnung (224), welche durch die Curve k' geht; also entspricht dem Durchschnitte von F_3 mit $\mathfrak{E}'$ der Durchschnitt von E mit $\mathfrak{F}'_3$, das heisst: *einer auf F_3 gezogenen cubischen Plancurve entspricht auf E eine cubische Curve, welche durch die sechs Fundamentalpuncte geht*; und umgekehrt, einer beliebigen cubischen Curve, welche durch diese sechs Fundamentalpuncte geht, entspricht ein ebener Schnitt von F_3. Zwei cubische Curven durch diese sechs Puncte auf E gezogen, schneiden sich in drei neuen Puncten, welche den Durchschnittspuncten von F_3 mit einer beliebigen Geraden (der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen $\mathfrak{E}'$) entsprechen.

Berührt $\mathfrak{E}'$ die Fläche F_3 im Puncte $\mathfrak{x}'$, so hat die entsprechende cubische Curve auf E einen Doppelpunct im entsprechenden Puncte $\mathfrak{x}$. Gehört $\mathfrak{x}'$ der Geraden a_ρ an, so wird $\mathfrak{x}$ der dieser Geraden entsprechende Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$. In diesem Falle enthält die Ebene $\mathfrak{E}'$ die Gerade a und schneidet F_3 noch in einem Kegelschnitt, also: Eine cubische Curve, die durch die Fundamentalpuncte beschrieben ist, und für welche einer dieser Puncte ein Doppelpunct ist, entspricht einem Kegelschnitt, der F_3 und einer Bitangentialebene gemein ist, welche durch eine Gerade a geht. Alle analogen cubischen Curven, welche den Knoten im nämlichen Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_\rho$ haben, bilden ein Büschel. Die Involution der Tangentenpaare im Knotenpuncte entspricht der Involution der Punctenpaare in denen a_ρ von den Kegelschnitten der Bitangentialebenen geschnitten wird, und die Doppelstrahlen der ersten Involution entsprechen den Doppelpuncten der zweiten; das heisst, *die beiden cubischen Curven des Büschels, für welche der Doppelpunct $\mathfrak{a}_\rho$ ein Rückkehrpunct ist, entsprechen den beiden Kegelschnitten von F_3, welche die Gerade a_ρ berühren.*

Ebenso findet man leicht: *Dem Kegelschnitt in einer Bitangentialebene welche durch die Gerade $c_{\rho\sigma}$ geht, entspricht ein Kegelschnitt, der durch vier Fundamentalpuncte beschrieben ist, ausgenommen $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$*; dieser Kegelschnitt und die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ bilden die cubische Curve, welche dem vollständigen Durchschnitt der Bitangentialebene entspricht. *Dem Kegelschnitt, der in einer Bitangentialebene liegt, welche durch die Gerade b_ρ geht, entspricht eine Gerade, welche durch den Punct $\mathfrak{a}_\rho$ hindurchläuft.* Diese Gerade und der Kegelschnitt, welcher durch die übrigen fünf Fundamentalpuncte beschrieben ist, bilden die cubische Curve, welche dem vollständigen Schnitte der Bitangentialebene entspricht.

233. *Der Raumcurve $\mathfrak{c}_{3\nu}$, in der F_3 von einer Fläche ν-ter Ordnung geschnitten wird, entspricht eine Plancurve die ν-mal durch jeden Fundamentalpunct geht,* wegen der ν Puncte, in denen die Fläche ν-ter Ordnung durch jede der

Geraden a geschnitten wird. Diese Plancurve wird von einer beliebig durch die Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ beschriebenen cubischen Curve in diesen Puncten, welche als 6ν Durchschnitte gelten, und in 3ν andern Puncten geschnitten, die denjenigen entsprechen, in welchen $\mathfrak{c}_{3\nu}$ von einer Ebene getroffen wird. Die Plancurve, welche $\mathfrak{c}_{3\nu}$ entspricht, ist also von der Ordnung 3ν und dem Geschlecht $\frac{1}{2}(3\nu^2-3\nu+2)-(\delta+\sigma)$, vorausgesetzt, dass die beiden Flächen in δ Puncten eine einfache und in σ Puncten eine stationäre Berührung haben (58, 117).

234. Sei $\nu=2$. In diesem Falle schneidet eine Quadrifläche die Fläche F_3 *in einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,4}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 4, welche jede der 27 Geraden zweimal trifft. Ihr entspricht auf E eine Plancurve von derselben Ordnung, welche zweimal durch jeden der Puncte $\mathfrak{a}_1, .., \mathfrak{a}_6$ geht. Diese Curve kann noch ausserdem vier Doppelpuncte haben, also *kann eine Quadrifläche die Fläche* F_3 *höchstens in vier Puncten berühren, ohne dass die Durchschnittscurve sich in niedere Curven auflöst.*

235. Geht die Quadrifläche durch Gerade von F_3, z. B. durch b_1, so zerfällt die Curve $\mathfrak{c}_{6,4}$ in zwei Theile, *deren zweiter eine Curve* $\mathfrak{c}_{5,2}$ *der fünften Ordnung und vom Geschlechte* 2 *ist.* Während b_1 dem Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ entspricht, entspricht der Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$ eine Plancurve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (das heisst, die zweimal durch $\mathfrak{a}_1$ geht und einmal durch $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, .., \mathfrak{a}_6$) der vierten Ordnung. Diese Plancurve trifft (ausser in den Fundamentalpuncten) den Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ in drei Puncten, die andern Kegelschnitte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \ldots$ in zwei Puncten, die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6$ in einem Puncte und die andern Geraden $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ in zwei Puncten, und also trifft die Raumcurve $\mathfrak{c}_{5,2}$ dreimal die Gerade b_1, zweimal die Geraden $a_1, b_2, b_3, .., b_6, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{56}$ und nur einmal die Geraden $a_2, \ldots, a_6, c_{12}, \ldots, c_{16}$.

Wenn die Quadrifläche, statt durch b_1 zu gehen, durch eine Gerade c_{12} oder eine Gerade a_1 geht, so erhält man eine Plancurve fünfter Ordnung $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ oder eine Plancurve sechster Ordnung $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$, die immer einer Raumcurve entsprechen, welche $\mathfrak{c}_{5,2}$ analog ist.

Jede Gerade auf F_3 *bestimmt auf dieser Fläche ein System zu* $\mathfrak{c}_{5,2}$ *analoger Curven.* Alle Curven eines Systems treffen dieselbe Gerade dreimal. *Jede Curve* eines gegebenen Systems *ist durch sechs Puncte bestimmt*, denn die Plancurve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ kann durch sechs beliebige Puncte gehen. *Zwei Curven desselben Systems schneiden sich in sieben Puncten*; zwei Curven aus verschiedenen Systemen entsprechend zwei Geraden, $\left\{\begin{matrix}\text{die sich nicht treffen}\\ \text{die sich treffen}\end{matrix}\right\}$, haben $\left\{\begin{matrix}\text{acht}\\ \text{neun}\end{matrix}\right\}$ Puncte gemein.

236. Geht die Quadrifläche durch zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, wie b_1, b_2, so schneidet sie F_3 nochmals *in einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,0}$ *vierter Ordnung und vom Geschlechte* 0, die nicht der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist. Die gegebene Quadrifläche hat in der

That zwei Systeme geradliniger Generatrixen; das eine gebildet aus Geraden, welche b_1 und b_2 schneiden, das anderen, aus Geraden, die weder b_1 noch b_2 treffen. Nun trifft jede Generatrix des erstens Systems F_3 in zwei Puncte der Geraden b_1, b_2 und also $\mathfrak{c}_{4,0}$ in einem einzigen Puncte, welcher der dritte Durchschnittspunct mit der Fläche ist. Dagegen trifft jede Generatrix des andern Systems F_3 (ausserhalb b_1, b_2) und folglich auch $\mathfrak{c}_{4,0}$ in drei Puncten. Es gibt daher keine andere Quadrifläche, die durch $\mathfrak{c}_{4,0}$ geht, weil die Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung jede geradlinige Generatrix jeder der Quadriflächen, welche durch diese Curven gehen, in zwei Puncten schneiden muss. [1])

Der Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ entspricht auf E ein Kegelschnitt, der durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ geht, und mit den den Geraden b_1, b_2 entsprechenden Kegelschnitten eine Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der sechsten Ordnung bildet. Aus den Durchschnittspuncten des Kegelschnitts $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ mit den entsprechenden Curven der Geraden von F_3 beweist man, dass die Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ die Geraden b_1, b_2 in drei Puncten, die zehn Geraden $b_3, b_4, b_5, b_6, c_{34}, c_{35}, \ldots, c_{56}$ in zwei Puncten, und die zehn Geraden $a_1, a_2, c_{13}, c_{14}, \ldots, c_{26}$ in einem einzigen Puncte schneidet. Die fünf noch übrigen $a_3, a_4, a_5, a_6, c_{12}$ werden von $\mathfrak{c}_{4,0}$ gar nicht getroffen. Daraus, dass durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und drei beliebige andere Puncte der Geraden E nur ein einziger Kegelschnitt geht, folgt, *dass durch drei gegebene Puncte von F_3 sich nur eine einzige Raumcurve vierter Ordnung und vom Geschlechte* 0 *legen lässt, welche durch zwei gegebene Gerade der cubischen Fläche, die nicht in derselben Ebene liegen, dreimal getroffen werden soll.* [2])

Lässt man die Quadrifläche durch b_1 und c_{23} oder durch c_{12} und c_{13} oder durch a_1 und b_1 oder durch a_1 und c_{23} oder endlich durch a_1 und a_2 gehen, so erhält man auf der Ebene E bezüglich eine Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ dritter Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der vierten Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ der vierten Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ fünfter Ordnung, oder endlich eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der sechsten Ordnung, denen auf F_3 stets eine zu $\mathfrak{c}_{4,0}$ analoge Curve entspricht.

237. Wenn die Quadrifläche die Fläche F_3 in einem Kegelschnitte schneidet, der z. B. in einer Ebene liegt, die durch a_1 geht, so haben die beiden Flächen ausserdem noch *eine Raumcurve $\mathfrak{c}_{4,1}$ vierter Ordnung und vom Geschlechte* 1 gemein, die von jeder Geraden zweimal geschnitten wird, welche auf der Quadri-

---

[1]) Die von Steiner in Betreff dieser Raumcurve gegebenen Sätze sind schon mit mehreren anderen geometrisch bewiesen in einer Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, T. 4; p. 71.

[2]) Zwei Kegelschnitte, welche durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ gehen, schneiden sich in zwei weitern Puncten, folglich schneiden sich auch zwei Curven vierter Ordnung und vom Geschlechte 0, die auf F_3 gezogen sind und dieselben zwei Geraden (b_1, b_2) dreimal treffen, in zwei Puncten.

fläche liegt; denn diese Gerade hat mit dem Kegelschnitt einen Punct gemein, und trifft also die cubische Fläche noch in zwei weiteren Puncten. Jede durch die Gerade a_1 gelegte Ebene schneidet F_3 in einem Kegelschnitte, der mit $\mathfrak{c}_{4,1}$ vier Puncte gemein hat; durch diesen Kegelschnitt und durch $\mathfrak{c}_{4,1}$ kann man also eine Fläche zweiter Ordnung legen. Die Curve $\mathfrak{c}_{4,1}$ ist daher die Basis eines Büschels Quadriflächen.

Der Curve $\mathfrak{c}_{4,1}$ entspricht auf E eine Curve $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ dritter Ordnung, (da der Kegelschnitt als entsprechende Curve eine cubische Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ hat); folglich trifft die Raumcurve $\mathfrak{c}_{4,1}$ die Gerade a_1 nicht; sie trifft die zehn Geraden $b_2, \ldots, b_6, c_{12}, \ldots, c_{16}$ in je zwei Puncten und die sechszehn noch übrigen in je einem Puncte.

Die zehn Geraden, welche die Raumcurve zweimal schneidet, werden auch durch die einzige Gerade, welche der Curve nicht begegnet, getroffen. *Also enthält F_3 27 Systeme von Curven $\mathfrak{c}_{4,1}$*; die Curven ein und desselben Systems werden nicht von derselben Geraden getroffen. *Vier Puncte bestimmen eine Curve eines gegebenen Systems. Zwei Curven desselben Systems haben vier Puncte gemein, zwei Curven aus verschiedenen Systemen dagegen schneiden sich in fünf Puncten.*

Vertauscht man die Gerade a_1 mit einer andern, so kann man andere Plancurven von höherer Ordnung erhalten (aber sie sind immer vom Geschlecht 1), die zu $\mathfrak{c}_{4,1}$ analogen Raumcurven entsprechen.

238. Die Durchschnittscurve von F_3 mit einer Quadrifläche kann auch in zwei cubische Raumcurven $\mathfrak{c}_{3,0}$ zerfallen; entspricht davon die eine einer beliebigen Geraden (224) in E, so entspricht die zweite einer Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2$ fünfter Ordnung. Die Untersuchung dieser Plancurven lässt augenblicklich erkennen, *dass eine cubische Raumcurve, (die auf F_3 liegt) sechs Gerade zweimal trifft, sechs andere Gerade nicht trifft und die übrigen in einem Puncte schneidet.* Die beiden Gruppen von je sechs Puncten sind die conjugierten *Sechstupel* desselben Doppelsechs, in der Art, *dass jedes Doppelsechs zwei conjugierte Systeme cubischer Raumcurven bestimmt,* in denen jede Curve zweimal die Geraden des einen Sechstupel trifft und die Geraden des andern Sechstupel nicht schneidet. *Zwei cubische Raumcurven, welche durch dieselbe Quadrifläche entstehen, gehören stets zwei conjugierten Systemen an, und umgekehrt,* und treffen sich in fünf Puncten. Zwei cubische Raumcurven desselben Systemes haben einen einzigen Punct gemein.

239. Wir wollen jetzt die Curven betrachten, welche aus dem Durchschnitt von F_3 mit einer andern Fläche F_3° derselben Ordnung entsteht. Im Allgemeinen ist dieser Schnitt *eine Raumcurve neunter Ordnung,* welche jede der 27 Geraden dreimal trifft. Die entsprechende Plancurve ist von derselben Ordnung und geht dreimal durch jeden Fundamentalpunct. Daraus folgt, dass diese Curve ebenso wie *die Raumcurve vom Geschlecht*

$$\frac{8.7}{2} - 3.6 = 10$$

ist. Die Plancurve kann höchstens noch andere zehn Doppelpuncte haben, *also können sich zwei cubische Flächen höchstens in zehn Puncten berühren, ohne dass ihre Durchschnittscurve sich in niedere Curven spaltet.*

Drei cubische Raumcurven bilden den Durchschnitt von F_3 mit einer cubischen Fläche, wenn ihre entsprechenden Plancurven zusammen eine Linie $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_3^3\mathfrak{a}_4^3\mathfrak{a}_5^3\mathfrak{a}_6^3$ neunter Ordnung bilden; dergleichen cubische Raumcurven sind zum Beispiel die, welche einer beliebigen Geraden und zwei Curven $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ nnd $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ vierter Ordnung entsprechen.

Unter derselben Bedingung können zwei Raumcurven vierter Ordnung und eine Gerade die F_3 und F_3^0 gemeinschaftliche Curve bilden. Sind die beiden Raumcurven vom Geschlechte 0 ohne Doppelpunct [1]), so schneiden sie sich in acht Puncten und treffen jede die Gerade zweimal. Sind beide Raumcurven vom Geschlechte 1 [2]), so gehören sie zwei Systemen an, die zwei in derselben Ebene liegenden Geraden entsprechen; die dritte Gerade dieser Ebene ist diejenige, welche den Durchschnitt beider cubischen Flächen vervollständigt. Die beiden Raumcurven schneiden sich in sechs Puncten, und jede von ihnen trifft die vervollständigende Gerade zweimal. Ist endlich von den beiden Curven die eine vom Geschlechte 0 ohne Doppelpunct, die zweite vom Geschlechte 1 [3]), so schneiden sie sich in sieben Puncten, und die Ergänzungsgerade trifft die erste Curve in drei Puncten und die andere in einem einzigen.

Unter derselben Bedingung kann der Schnitt von F_3 und F_3^0 sich aus einer Raumcurve vierter Ordnung, einer cubischen Raumcurve und einem Kegelschnitt zusammensetzen (oder zwei Geraden, die selbst nicht in einer Ebene zu liegen brauchen). Wir haben aber hier nicht die Absicht, uns bei allen Specialfällen aufzuhalten.

Angenommen F_3 und F_3^0 hätten die Raumcurve $\mathfrak{c}_{5,2}$ gemein (229), welche einer Plancurve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung entspricht, dann schneiden sich die beiden Flächen noch ausserdem in einer Raumcurve vierter Ordnung, deren entsprechende Plancurve eine Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ fünfter Ordnung ist; also ist die zweite Raumcurve vom Geschlechte 1. *Daher können zwei Raumcurven* $\mathfrak{c}_{5,2}$ *und* $\mathfrak{c}_{4,1}$ *den Durchschnitt von* F_3 *mit einer andern cubischen Fläche bilden, wenn nur die Systeme* (235, 237), *denen sie angehören, derselben Geraden entsprechen;* das heisst unter der Bedingung, dass die erste

---

[1]) Z. B. diejenigen, welche der cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6^2$ und der Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ vierter Ordnung entsprechen; die Gerade ist b_1.

[2]) Z. B. die, welche einer cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ und einer Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6^2$ vierter Ordnung entsprechen; die Ergänzungsgerade ist b_1.

[3]) Z. B. diejenigen, welche zwei Curven $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$, $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung entsprechen; die Ergänzungsgerade ist hier c_{12}.

Raumcurve diejenige Gerade in drei Puncten schneidet, welche die zweite Curve nicht trifft. Die beiden Raumcurven haben acht Puncte gemein. Aber es ist nicht möglich, dass zwei Curven $\mathfrak{c}_{5,2}$ und $\mathfrak{c}_{4,0}$ (ohne Doppelpunct) gleichzeitig auf zwei Flächen dritter Ordnung liegen.

Als Specialfall des Vorhergehenden kann der Schnitt der Flächen F_3, F_3° zusammengesetzt sein aus einer Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$, einer cubischen Raumcurve und einer Geraden, die von jeder Curve zweimal getroffen wird. Diese letztern haben sechs Puncte gemein.

240. Man kann aber auch noch andere Raumcurven fünfter Ordnung betrachten, die von $\mathfrak{c}_{5,2}$ verschieden sind. In der That, geht F_3° durch eine Gerade nnd durch eine cubische Raumcurve, die auf F_3 liegen, so wird der Schnitt durch eine Raumcurve fünfter Ordnung vervollständigt, welche (239) vom Geschlecht 2 ist, wenn die Gerade und die cubische Raumcurve zwei Puncte gemein haben. Schneidet aber die Gerade die cubische Raumcurve nur einmal oder gar nicht, so erhält man Raumcurven von niederem Geschlecht.

Der erste Fall tritt z. B. ein, wenn die Plancurve sechster Ordnung, die dem vollständigen Schnitte von F_3 und F_3° entspricht, aus dem Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (der der Geraden b_1 entspricht), einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (die einer cubischen Raumcurve entspricht, die auf b_1 in einem Puncte aufsteht) und einer cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ zusammengesetzt ist. Der letzteren entspricht also *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{5,1}$ *fünfter Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche die cubische Raumcurve in neun Puncten und die Gerade in drei Puncten trifft. Man erhält dieselbe Curve $\mathfrak{c}_{5,1}$, wenn die beiden cubischen Flächen eine Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ gemein haben, die beiden Raumcurven haben dann zehn Puncte gemein, und die erste Raumurve trifft diejenigen Geraden in 0, 1, 2, 3 Puncten, welche die andere bezüglich in 3, 2, 1, 0 Puncten schneiden.

Man erhält den letzten Fall, wenn z. B. die Plancurve sechster Ordnung in folgende drei Linien zerfällt: den Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$, der der Geraden b_1 entspricht; eine Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2\mathfrak{a}_6{}^2$ fünfter Ordnung, Bild einer cubischen Raumcurve, die mit der Geraden b_1 keinen Punct gemein hat; endlich einen Kegelschnitt der durch den Punct $\mathfrak{a}_1$ geht, und dem folglich *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{5,0}$ *fünfter Ordnung und vom Geschlechte* 0 entspricht. Diese Raumcurve schneidet die cubische Raumcurve in acht Puncten, die Gerade b_1 in vier Puncten, die Geraden $b_2, \ldots, b_6$ in drei Puncten, die Geraden $c_{23}, \ldots, c_{56}$ in zwei Puncten, die Geraden $a_1, c_{12}, \ldots, c_{16}$ in nur einem Puncte und die andern Geraden $a_2, \ldots, a_6$ in keinem Puncte.

Von den drei Raumcurven $\mathfrak{c}_{5,2}, \mathfrak{c}_{5,1}, \mathfrak{c}_{5,0}$ fünfter Ordnung liegt nur die erste auf einer Quadrifläche. Sie hat vier scheinbare Doppelpuncte (d. h. durch einen beliebigen Punct des Raumes kann man vier Gerade ziehen, welche die Curve zweimal treffen), dagegen hat die zweite deren fünf und die dritte sechs. Die dritte ist die einzige, welche eine Gerade der cubischen Fläche zulässt, die sie in vier Puncten schneidet.

241. Diese Methode, auf der Ebene E die Eigenschaften der auf F_3 gezogenen Curven zu untersuchen, ist so einleuchtend und so leicht, dass wir uns jetzt begnügen werden, nur die Resultate auszusprechen. Um so die Raumcurven sechster Ordnung zu erhalten, welche einen Theil des Durchschnitts zweier cubischer Flächen bilden, muss man folgende Fälle betrachten:

1. Die Flächen F_3, F_3^0 haben einen ebenen Schnitt gemein, dann ist der andere Theil des Schnittes *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,4}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 4, die auch beim Durchschnitt der Fläche F_3 mit einer Quadrifläche entsteht (234).

2. Die Flächen F_3, F_3^0 haben eine cubische Raumcurve gemein und schneiden sich ausserdem noch in *einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,3}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 3, welche mit der cubischen Curve acht Puncte gemein hat, und diejenigen Geraden in 1, 2, 3 Puncten schneidet, welche die cubische Curve bezüglich in 2, 1, 0 Puncten trifft. Daraus folgt, dass $\mathfrak{c}_{6,3}$ sowie die cubische Curve einem gewissen Doppelsechs entsprechen.

3. Die Flächen F_3, F_3^0 gehen zugleich durch eine Gerade und einen Kegelschnitt, die keinen Punct gemein haben. Dann wird der Schnitt durch *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,2}$ *sechster Ordnung und vom Geschlecht* 2 vervollständigt, welche den Kegelschnitt in sechs Puncten und die gegebene Gerade in vier Puncten trifft. Unter den andern Geraden gibt es 8, 9, 8, 1 die bezüglich in 3, 2, 1, 0 Puncten geschnitten werden.

4. Die Flächen F_3, F_3^0 haben drei Gerade die sich nicht schneiden gemein; sie schneiden sich dann noch in *einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,1}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche jede von den drei gegebenen Geraden in vier Puncten schneidet, u. s. w.

Von diesen vier Curven sechster Ordnung ist nur die erste auf einer Quadrifläche gelegen. Sie haben bezüglich sechs, sieben, acht, neun scheinbare Doppelpuncte.

Die Curve $\mathfrak{c}_{6,3}$ ist diejenige, welche wir auch anderweitig schon gefunden haben (130, 189, 218) und zwar als Ort der Scheitel der Quadrikegel eines Netzes. Die entsprechende Plancurve kann eine allgemeine Curve vierter Ordnung sein (durch sämmtliche sechs Fundamentalpuncte); es folgt daraus, da z. B. diese Plancurve 28 Doppeltangenten und 24 stationäre Tangenten hat, dass auch unter den cubischen Raumcurven, welche in zwei Puncten diejenigen Geraden von F_3 schneiden, welche $\mathfrak{c}_{6,3}$ dreimal treffen, 28 existieren, welche $\mathfrak{c}_{6,3}$ in zwei Puncten berühren, und 24, welche mit derselben einen dreipunctigen Contact haben.

In derselben Weise wie für die cubischen Raumcurven *bestimmt jedes Doppelsechs zwei conjugierte Systeme von Raumcurven sechster Ordnung und vom Geschlecht* 3. Zwei Curven, die zwei conjugierten Systemen angehören haben 20 Puncte gemein und bilden den vollständigen Durchschnitt zwischen F_3 und einer Fläche vierter Ordnung.

242. Es gibt auch *eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlecht* 0, aber dieselbe liegt nicht gleichzeitig auf zwei cubischen Flächen. Man erhält diese Curve, wenn man eine Fläche vierter Ordnung durch drei Gerade, wie b_1, b_2, b_3, die sich nicht schneiden, und eine cubische Raumcurve (entsprechend einer Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung) legt, welche jede Gerade in einem Puncte schneidet. Die daraus resultierende Curve $\mathfrak{c}_{6,0}$ entspricht einem Kegelschnitt, der durch keinen der Fundamentalpuncte geht, und schneidet die cubische Raumcurve in acht Puncten. Unter den 27 Geraden von F_3 gibt es 6, 6, 15, die von $\mathfrak{c}_{6,0}$ bezüglich in 4, 0, 2 Puncten geschnitten werden. Diese Curve $\mathfrak{c}_{6,0}$ hat zehn scheinbare Doppelpuncte.

243. Aus dem Durchschnitt zweier cubischer Flächen F_3, F_3^0 können sich nur *zwei Raumcurven siebenter Ordnung* $\mathfrak{c}_{7,5}$ *und* $\mathfrak{c}_{7,4}$ und *eine einzige Raumcurve achter Ordnung* $\mathfrak{c}_{8,7}$ ergeben. Man erhält diese Curven, wenn man F_3^0 bezüglich entweder durch einen Kegelschnitt oder durch zwei sich nicht schneidende Gerade oder durch eine Gerade (von F_3) gelegt denkt.

Auf F_3 gibt es 27 Systeme von zu $\mathfrak{c}_{8,7}$ analogen Curven, jedes System ist einer Geraden von F_3 zugeordnet. Ist das System gegeben, so ist die Curve durch vierzehn Puncte bestimmt. Zwei Curven desselben Systems haben zwanzig Puncte gemein.

Der Durchschnitt von F_3 mit Flächen höherer Ordnung gibt andere Curven 7., 8., 9., ... Ordnung. Lässt man z. B. durch zwei Gerade, die sich nicht schneiden, und durch eine cubische Raumcurve, die keine dieser Geraden trifft, eine Fläche vierter Ordnung gehen, so erhält man *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{7,1}$ *siebenter Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche die cubische Curve in eilf Puncten und jede gegebene Gerade in fünf Puncten schneidet. Legt man durch drei Gerade, die sich nicht schneiden, und durch eine Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$, welche zwei jener Geraden in einem Puncte trifft und die dritte gar nicht, eine Fläche fünfter Ordnung, so wird der Schnitt durch *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{8,1}$ *achter Ordnung und vom Geschlechte* 1 vervollständigt, welche $\mathfrak{c}_{4,0}$ in sechszehn Puncten, die beiden ersten Geraden in fünf Puncten und die dritte in sechs Puncten trifft. Endlich erhält man *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{9,1}$ *neunter Ordnung und vom Geschlechte* 1, sobald der Durchschnitt von F_3 mit einer Fläche sechster Ordnung sich in zwei Curven derselben Ordnung auflöst; u. s. w., u. s. w.

244. Wir haben gesehen, dass ein und derselben Curve auf F_3, deren Ordnung und Geschlecht bekannt ist, auf E Plancurven verschiedener Ordnung entsprechen, die aber stets von demselben Geschlechte sind (54). Indem wir uns darauf beschränken, für jedes Geschlecht die Plancurve von der kleinst möglichen Ordnungszahl zu betrachten, können wir folgende Uebersicht geben.

1. *Einer Geraden auf E entspricht auf* F_3 *ein Kegelschnitt oder eine cubische Raumcurve, jenachdem die Gerade durch einen Fundamentalpunct geht oder nicht.*

2. *Einem Kegelschnitt auf E entspricht auf F_3 eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,0}$ *oder* $\mathfrak{c}_{5,0}$ *oder* $\mathfrak{c}_{6,0}$, *jenachdem der Kegelchnitt durch* 2, 1, 0 *Fundamentalpuncte geht.*

3. *Einer allgemeinen cubischen Curve auf E entspricht auf F_3 eine cubische Plancurve* $\mathfrak{c}_{3,1}$ *oder eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{5,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{6,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{7,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{8,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{9,1}$, *jenachdem die gegebene cubische Curve durch* 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 *Fundamentalpuncte hindurchgeht.* U. s. w.; u. s. w.

245. Es sei jetzt auf E im Allgemeinen eine Curve ν-ter Ordnung gegeben, welche bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ mal durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_6$ geht und mit δ Doppelpuncten und $\varkappa$ Spitzen versehen ist, die anderswo liegen. Die Ordnung der Raumcurve, die ihr auf F_3 entspricht, ist offenbar $3\nu - \mathfrak{S}\alpha$ [1]) und ihr Geschlecht ist genau das nämliche als das der Plancurve, also

$$\tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha(\alpha-1) - (\delta+\varkappa),$$

Nun ist aber eine Raumcurve der $(3\nu-\mathfrak{S}\alpha)$-ten Ordnung mit δ Doppelpuncten $\varkappa$ Spitzen und ϑ scheinbaren Doppelpuncten von dem durch folgende Formel gegebenen Geschlecht:

$$\tfrac{1}{2}(3\nu-\mathfrak{S}\alpha-1)(3\nu-\mathfrak{S}\alpha-2) - (\vartheta+\delta+\varkappa),$$

also ist

$$\vartheta = 4\nu^2 - 3\nu(\mathfrak{S}\alpha+1) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\alpha+1)^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\alpha^2-1).$$

Da wir so die Ordnung der Raumcurve, die wir kurz durch ν_1 bezeichnen wollen, die Zahl der wirklichen und scheinbaren Doppelpuncte kennen, so können wir nach den Formeln Cayley's (10, 12) die andern Charakteristiken der Curve berechnen, nämlich:

Die Ordnung der osculierenden Developpablen

$$\rho = \nu_1(\nu_1-1) - 2(\vartheta+\delta) - 3\varkappa = \nu(\nu+3) - \mathfrak{S}\alpha(\alpha+1) - (2\delta+3\varkappa);$$

die Classe dieser Developpablen

$$\mu = 3\nu_1(\nu_1-2) - 6(\vartheta+\delta) - 8\varkappa = 3(\nu^2 - \mathfrak{S}\alpha^2) - (6\delta+8\varkappa);$$

die Zahl der stationären Osculationsebenen

$$\sigma = \varkappa + 2(\mu-\nu_1) = 6\nu(\nu-1) - 2\mathfrak{S}\alpha(3\alpha-1) - 3(4\delta+5\varkappa);$$

die Classe der doppeltberührenden Developpablen

$$\begin{aligned}\eta &= \vartheta + \tfrac{1}{2}(\rho-\nu_1)(\rho+\nu_1-9) + \delta \\ &= \tfrac{1}{2}\nu(\nu^2-1)(\nu+6) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha^2(\mathfrak{S}\alpha+1) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}[2\delta+3\varkappa+\mathfrak{S}\alpha(\alpha+1)][2\nu^2+6\nu-9-2\delta-3\varkappa-\mathfrak{S}\alpha^2] \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha(2\delta+3\varkappa+\mathfrak{S}\alpha-7) + \delta;\end{aligned}$$

die Zahl der Ebenen, welche die Curve in drei Puncten berühren,

$$\tau = \tfrac{1}{3}[(\rho-2)\eta - \rho(3\mu+\nu_1) + 6\mu + 10(\sigma+\nu_1)];$$

u. s. w., u. s. w.

Umgekehrt drücken diese Zahlen auch die Eigenschaften der gegebenen Plancurve aus, nämlich: In dem Systeme der cubischen Curven, welche durch die sechs Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ gehen, gibt es σ, die mit der gegebenen Curve

[1]) $\mathfrak{S}$ ist als Summenzeichen gebraucht worden.

eine vierpunctige Berührung haben, und τ, welche in drei verschiedenen Puncten berühren; in einem Netze dieser cubischen Curven gibt es μ, die mit der Curve einen Contact zweiter Ordnung haben, und η, welche sie in zwei verschiedenen Puncten berühren; in einem Büschel derselben cubischen Curven gibt es ρ, welche die gegebene Curve berühren.

Man beachte ausserdem, dass die gegebene Plancurve a_ρ-mal durch den Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$ geht, den Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpuncte mit Ausnahme von $\mathfrak{a}_\rho$ geht, in $2\nu-(\mathfrak{S}a-a_\rho)$ von den Fundamentalpuncten verschiedenen Puncten schneidet, und die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ in $\nu-(a_\rho+a_\sigma)$ Puncten (ebenfalls von den Fundamentalpuncten verschieden) trifft, und daher die entsprechende Raumcurve mit der Geraden a_ρ a_ρ Puncte, mit der Geraden b_ρ ebenso $2\nu+a_\rho-\mathfrak{S}a$ Puncte und mit $c_{\rho\sigma}$ endlich $\nu-(a_\rho+a_\sigma)$ Puncte gemein hat.

246. Es sei noch erlaubt, speciell auf den Fall einzugehen, dass alle a gleich Null sind, das heisst, dass die Plancurve durch keinen der Fundamentalpuncte geht. *Dann entspricht die Raumcurve, die von der Ordnung 3ν ist, einem gewissen Doppelsechs; sie schneidet die Geraden des einen Sechstupel je 2ν-mal und die Geraden des andern Sechstupel gar nicht; jede der fünfzehn andern Geraden wird von der Raumcurve in ν Puncten getroffen. Jedes Doppelsechs bestimmt somit zwei conjugierte Systeme analoger Raumcurven*; ist das System gegeben, so gibt es nur eine Curve, welche durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebene Puncte geht. Zwei Curven desselben Systems haben ν^2 Durchschnittspuncte.

Die Raumcurve 3ν-ter Ordnung, entsprechend der Plancurve ν-ter Ordnung, welche durch keinen der Fundamentalpuncte geht, und die Raumcurve derselben Ordnung, die der Plancurve 5ν-ter Ordnung entspricht, die 2ν-mal durch jeden Fundamentalpunct geht, bilden zusammen den vollständigen Durchschnitt zwischen F_3 und einer Fläche 2ν-ter Ordnung und gehören zwei in Bezug auf das nämliche Doppelsechs conjugierten Systemen an. Diese beiden Raumcurven haben $5\nu^2$ Puncte gemein. Wenn sie keine Doppelpuncte besitzen (das heisst, wenn die entsprechenden Plancurven keine solche haben ausser den Fundamentalpuncten), oder auch, wenn sie solche in gleicher Zahl haben, so sind sämmtliche Charakteristiken für beide Curven dieselben. Unter Annahme, dass keine Doppelpuncte vorhanden sind, hat man folgende Charakteristiken:

Ordnung 3ν,
Geschlecht $\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$,
Zahl der scheinbaren Doppelpuncte $\nu(4\nu-3)$,
Ordnung der osculierenden Developpablen $\nu(\nu+3)$,
Classe derselben $3\nu^2$,
Zahl der stationären Osculationsebenen $6\nu(\nu-1)$,
Classe der doppeltberührenden Developpablen $\frac{1}{2}\nu(\nu^2-1)(\nu+6)$
Zahl der dreifachen Tangentialebenen $\frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu^4+10\nu^3+7\nu^2-74\nu+48)$

u. s. w.

CAPITEL V.
QUADRIFLÄCHEN, WELCHE AUS EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG KEGELSCHNITTE AUSSCHNEIDEN.

247. *Zwei Kegelschnitte die auf einer gegebenen Fläche F_3 dritter Ordnung liegen und zugleich in zwei Ebenen, welche durch zwei Gerade der Fläche gehen, die sich schneiden* (wie a_1, b_2), *haben stets zwei Puncte gemein,* weil die gemeinsame Gerade beider Ebenen jeden Kegelschnitt in zwei Puncten trifft, und ausserdem diese Gerade die Fläche F_3, ausser im Puncte $a_1 b_2$, nur in zwei Puncten schneidet; diese beiden Puncte sind also beiden Kegelschnitten gemein. Umgekehrt, haben zwei Kegelschnitte auf der Fläche zwei Puncte gemein, so schneidet die Gerade, welche diese Puncte verbindet, als Durchschnitt der Ebenen beider Kegelschnitte, die Fläche in einem dritten Puncte, welche den beiden Geraden der Fläche gemein ist, die in diesen Ebenen liegen.

Dagegen haben zwei Kegelschnitte auf der Fläche, die in zwei Ebenen liegen, welche durch zwei Gerade, wie a_1, a_2, gehen, die sich nicht schneiden, einen einzigen Punct gemein, wie schon früher (229) bemerkt ist. Zwei Kegelschnitte, die in zwei Ebenen liegen, welche durch dieselbe Gerade a_1 gehen, haben gar keinen Punct gemein, denn sie schneiden a_1 in zwei conjugierten Punctenpaaren einer Involution (220).

Folglich trifft eine Gerade der Fläche, wie a_1 jeden Kegelschnitt in zwei Puncten, der in einer Ebene liegt, die durch a_1 geht, dagegen jeden Kegelschnitt, der in einer Ebene liegt, welche durch eine Gerade geht, die a_1 nicht schneidet, in einem Puncte; aber die Gerade a_1 trifft die Kegelschnitte nicht, deren Ebenen durch Gerade gehen, welche auf a_1 aufstehen.

248. Zwei Kegelschnitte von F_3, die in zwei Ebenen bezüglich durch a_1, b_2 liegen, haben zwei Puncte gemein und bilden so die Basis eines Büschels von Quadriflächen, von denen eine jede F_3 in einem dritten Kegelschnitt trifft, der in einer Ebene liegt, welche durch die Gerade c_{12} geht, die a_1 und b_2 schneidet [1]). Dieser dritte Kegelschnitt kann beliebig angenommen werden. Denn, da die Basis des Büschels vier Puncte jedes Kegelschnittes enthält, der in einer Ebene durch c_{12} liegt, so genügt ein anderer beliebiger Punct dieser letzten Ebene um die Quadrifläche des Büschels zu bestimmen, die durch diesen Kegelschnitt geht. Es gibt also *eine einzige Quadrifläche, die*

---

1) Die Ebenen der drei Kegelschnitte bilden eine cubische Fläche, welche F_3 in drei Kegelschnitten und drei Geraden schneidet. Da die drei Kegelschnitte auf derselben Quadrifläche liegen, so sind die drei Geraden in einer Ebene enthalten (40).

durch drei Kegelschnitte geht, welche in drei beliebig durch a_1, b_2, c_{12} *gelegten Ebenen liegen.* Umgekehrt, trifft eine Quadrifläche die Fläche F_3 in drei Kegelschnitten, so schneiden die Ebenen derselben F_3 in drei Geraden, die in derselben Ebene liegen (40). Daraus folgt, dass drei beliebige conjugierte Punctenpaare der Involutionen, welche durch die Kegelschnitte der Fläche bezüglich auf a_1, b_2, c_{12} gebildet werden (220), ein und derselben Curve zweiter Ordnung angehören, die nicht auf F_3 liegt.

249. Es seien A, B zwei Bitangentialebenen von F_3, die eine durch a_1, die zweite durch b_2 gelegt. Durch die beiden Kegelschnitte (A), (B), die in diesen Ebenen enthalten sind, kann man zwei Quadrikegel legen, deren Scheitel auf der reciproken Geraden der Durchschnittsgeraden AB in Bezug auf eine beliebige Fläche zweiter Ordnung liegen, die durch (A) und (B) geht. Wir können beliebig eine Ebene C fixieren, die durch c_{12} geht, dann genügt die Quadrifläche (ABC), welche durch die Kegelschnitte (A), (B), (C) geht, um die Gerade, welche die Scheitel der beiden Kegel verbindet, zu bestimmen.

Lässt man die Ebene B um b_2 rotieren, so erzeugt die Quadrifläche (ABC) ein Büschel (AC), und die Gerade AB erzeugt in der Ebene A und um den Punct $a_1 b_2$ herum ein anderes dem ersten projectivisches Büschel. Die Geraden dieses Büschels werden von der Geraden AC in Puncten geschnitten, deren Polarebenen in Bezug auf die entsprechenden Flächen des Büschels (AC) durch dieselbe Gerade gehen, die Reciproke von AC in Bezug auf die Quadriflächen (AC); in ähnlicher Weise gehen die Polarebenen des Punctes $a_1 b_2$ in Bezug auf die Quadriflächen (AC) durch ein und dieselbe Gerade. Also erzeugen die Polarebenen der Puncte $a_1 b_2$ und ABC in Bezug auf die Fläche (ABC), wenn B als variabel betrachtet wird, zwei projectivische Büschel, und folglich *ist der Ort der reciproken Geraden von* AB *ein Hyperboloid* J_A*; die Generatrixen des andern Systems desselben sind offenbar die zu* AC *in Bezug auf die Quadrifläche* (ABC) *reciproken Geraden, wenn die Ebene* C *um* c_{12} *variabel ist.* Die Geraden AB, AC schneiden sich im Puncte ABC, ihre Reciproken sind daher auf der Polarebene dieses Punctes in Bezug auf die Fläche (ABC). *Das Hyperboloid* J_A *ist also die Enveloppe der Polarebene des Punctes* ABC *in Bezug auf die Quadrifläche* (ABC), *wenn* A *fest ist, und* B *und* C *variabel.*

Ein beliebiger Punct des Raumes ist der Durchschnitt von drei Ebenen A, B, C, welche eine Quadrifläche (ABC) bestimmen; umgekehrt bestimmt jede Fläche (ABC) einen Punct des Raumes. Also: *Das Hyperboloid* J_A *ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene* A *in Bezug auf die Quadriflächen* (ABC), *welche diesen Puncten entsprechen.*

Sobald die reciproken Geraden von AB, AC in der Polarebene des Punctes ABC in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) liegen, so ist der Durchschnittspunct dieser Reciproken der Pol der Ebene A in Bezug auf diese

Fläche; also *ist das Hyperboloid J_A der Ort der Pole der festen Ebene A in Bezug auf die Quadriflächen* (ABC).

Die Flächen (ABC) gehen durch den festen Kegelschnitt (A), und also schneiden sich die Polarebenen des Punctes $a_1 b_2$ in der Polargeraden dieses Punctes in Bezug auf den Kegelschnitt (A). Daraus folgt, dass das Hyperboloid J_A die Ebene A in der Polargeraden des Punctes $a_1 b_2$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) trifft und analog in der Polargeraden des Punctes $a_1 c_{12}$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt.

250. Man bezeichne durch $\mathfrak{o}$ den Punct $b_2 c_{12}$, dann ist eine beliebige Gerade $\mathfrak{ol}$ der Durchschnitt von zwei Ebenen B, C. Es seien $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die zu $\mathfrak{o}$ conjugierten harmonischen Puncte in Bezug auf die Punctenpaare, die den Durchschnitt der Kegelschnitte (B), (C) mit den Geraden $\mathfrak{ol}$, b_2, c_{12} bilden, dann sind die Geraden $\mathfrak{lm}$, $\mathfrak{ln}$ die Polaren des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Kegelschnitte, und es ist also $\mathfrak{lmn}$ die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels (BC). Zieht man ausserdem in der Ebene B durch $\mathfrak{o}$ eine beliebige Gerade, welche den Kegelschnitt (B) und folglich auch die Fläche F_3 in zwei Puncten trifft, so ist der harmonische conjugierte Punct von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Durchschnittspuncte auf der Geraden $\mathfrak{lm}$ gelegen; folglich gehört $\mathfrak{lm}$ und ebenso $\mathfrak{ln}$ der Quadrifläche O, ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_3 an; mit andern Worten, die Ebene $\mathfrak{lmn}$ berührt in $\mathfrak{l}$ diese Quadripolarfläche. Daraus ergibt sich endlich, dass *die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf alle Quadriflächen* (ABC), *was auch A, B, C sind, die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ umhüllen.*

Ich erinnere daran, dass das Hyperboloid J_A die Enveloppe der Polarebene des Punctes ABC in Bezug auf die Quadriflächen (ABC) ist, A als fest angesehen; lässt man nun A mit der dreifachen Tangentialebene $a_1 b_2 c_{12}$ zusammenfallen (in diesem Falle reduciert sich die Quadrifläche (ABC) auf die beiden Ebenen B, C), so fallen alle Puncte ABC auf $\mathfrak{o}$, also: *Dasjenige Hyperboloid J_A welches der Ebene $A \equiv a_1 b_2 c_{12}$ entspricht, ist nichts Anderes als die Quadripolarfläche O von $\mathfrak{o}$.*

251. Ist die Ebene $\mathfrak{lmn}$ um einen festen Punct $\mathfrak{i}$ des Raumes drehbar, so ist ihre Enveloppe ein der Quadrifläche O umgeschriebener Kegel; der Punct $\mathfrak{l}$ beschreibt den Berührungskegelschnitt und folglich ist der Ort der Geraden $\mathfrak{ol}$ ein Quadrikegel, der stets auch durch b_2 und c_{12} geht, denn da diese Geraden auf O liegen, so berühren die Ebenen $\mathfrak{i}b_2$, $\mathfrak{i}c_{12}$, was auch $\mathfrak{i}$ sei, diese Fläche in zwei Puncten, die den Geraden b_2, c_{12} angehören.

Es sei $\mathfrak{p}$ der Punct ABC, in dem die Gerade $\mathfrak{ol}$ eine feste Ebene A schneidet, die durch a_1 geht. Wenn $\mathfrak{ol}$ um $\mathfrak{o}$ sich dreht, so umhüllt die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) das Hyperboloid J_A. Da nun die Tangentialebenen von O projectivisch den Geraden durch $\mathfrak{o}$ entsprechen (der Ebene, welche O in $\mathfrak{l}$ berührt, entspricht die Gerade $\mathfrak{ol}$ und umgekehrt), so werden auch den Tangentialebenen von J_A die Geraden

durch $\mathfrak{o}$ projectivisch entsprechen in folgender Weise: Eine Tangentialebene von J_A schneidet A in einer Geraden, deren Pol $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) die entsprechende Gerade $\mathfrak{op}$ bestimmt. Umgekehrt trifft eine Gerade durch $\mathfrak{o}$ die Ebene A in einem Puncte $\mathfrak{p}$; durch die Polargerade von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) geht ausser A noch eine Tangentialebene von J_A, welche die entsprechende Ebene der durch $\mathfrak{o}$ gezogenen Geraden ist.

Die Tangentialebenen von J_A, die durch den Punct $\mathfrak{i}$ gehen, umhüllen einen Kegel, welcher A in einem Kegelschnitte trifft; die reciproke Polare dieses Kegelschnittes in Bezug auf den Kegelschnitt (A), wird vom Puncte $\mathfrak{o}$ aus unter einem Kegel gesehen, welcher durch die Geraden b_2, c_{12} geht, was auch $\mathfrak{i}$ ist, wegen der beiden Ebenen, welche durch $\mathfrak{i}$ und bezüglich durch die Polargeraden der Puncte a_1b_2, a_1c_{12} in Bezug auf den Kegelschnitt (A) gelegt sind (249). Dieser Kegel und der andere, der durch die entsprechenden Geraden $\mathfrak{ol}$ der Tangentialebenen von O, die durch $\mathfrak{i}$ gehen, gebildet wird, schneiden sich in zwei Geraden (ausser in b_2 und c_{12}). Das heisst: *Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ gehen zwei entsprechende Paare Tangentialebenen von O und J_A,* wo man zwei Ebenen *entsprechend* nennt, welche ein und derselben Geraden $\mathfrak{ol}$ entsprechen.

Es sei g die Gerade, in welcher sich zwei entsprechende Tangentialebenen von O und J_A schneiden, das heisst die Polarebenen der Puncte $\mathfrak{o}$ und ABC in Bezug auf ein und dieselbe Fläche (ABC); oder besser, sei g die Reciproke der Geraden BC in Bezug auf die Fläche (ABC), wo die Ebene A beliebig gewählt ist; dann erhält man aus dem Vorhergehenden, *dass die Geraden g, welche allen möglichen Paaren von Ebenen B, C entsprechen* (g ist von A unabhängig) *ein solches System bilden, dass durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ im Raume zwei Gerade g gehen.*

252. Wir wollen jetzt diejenigen Puncte des Raumes finden, für welche die beiden Geraden g zusammenfallen.

Ist die Gerade $\mathfrak{ol}$ in $\mathfrak{l}$ Tangente der cubischen Fläche F_3, und folglich auch aller Quadriflächen des Büschels (BC), so geht die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf eine solche Quadrifläche durch $\mathfrak{l}$, also gibt es unter den Tangentialebenen von J_A, die durch $\mathfrak{l}$ gehen, eine, deren entsprechende Gerade $\mathfrak{op}$ ist. Man lege jetzt den Punct $\mathfrak{i}$ auf $\mathfrak{l}$. Dann gehen die durch den Punct $\mathfrak{o}$ an die Fläche O gelegten Tangentialebenen durch die beiden Generatrixen $\mathfrak{lm}$, $\mathfrak{ln}$ und haben also ihre Berührungspuncte auf diesen Geraden; die entsprechenden von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Geraden bilden daher zwei Ebenen $\mathfrak{olm}$ und $\mathfrak{oln}$ (d. h. B und C). Nun entspricht dem Kegel vom Scheitel $\mathfrak{l}$, der J_A umgeschrieben ist, ein Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$, der durch $\mathfrak{ol}$ geht, wie man eben gesehen hat. Die beiden Geraden also, welche für einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ aus dem Durchschnitt der beiden Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ entstehen (251), reduciren sich in diesem Falle auf die einzige Gerade $\mathfrak{ol}$. Also: *Durch die gemeinsamen Puncte von F_3 und O geht nur je eine einzige Gerade g.*

253. Sei zweitens der Punct $\mathfrak{i}$ der Scheitel eines Quadrikegels, der durch die Kegelschnitte (B), (C) geht. Da die Wahl der Ebene A für die Bestimmung der Geraden g willkürlich ist, so kann man voraussetzen, dass diese Ebene durch $\mathfrak{i}$ geht. Weil nun $\mathfrak{i}$ auf der reciproken Geraden von BC oder $\mathfrak{olp}$ in Bezug auf jede Quadrifläche des Büschels (BC) liegt, so geht die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) durch $\mathfrak{i}$; ferner ist dieselbe Polarebene Tangentialebene der Fläche O in $\mathfrak{l}$; es geht also durch $\mathfrak{i}$ eine Tangentialebene von O, deren Berührungspunct $\mathfrak{l}$ ist, daher ist $\mathfrak{olp}$ die entsprechende Gerade.

In analoger Weise liegt $\mathfrak{i}$ in den Polarebenen aller Puncte von $\mathfrak{ol}$ in Bezug auf die Quadrifläche (ABC), und deshalb sind die Puncte $\mathfrak{i}, \mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) conjugiert.

Was das Hyperboloid J_A anbetrifft, so schneiden seine durch $\mathfrak{i}$ gelegten Tangentialebenen A in Geraden, die sich in $\mathfrak{i}$ kreuzen, und deren Pole in Bezug auf den Kegelschnitt (A) sich auf der Polare von $\mathfrak{i}$ befinden, die aus einer Geraden durch $\mathfrak{p}$ besteht. Daraus folgt, dass dem O umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{i}$ ein Kegel K vom Scheitel $\mathfrak{o}$ entspricht, der durch $\mathfrak{ol}$ geht; und dem, dem Hyperboloid J_A umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{i}$ entspricht (ausser der Ebene $a_1 b_2 c_{12}$) eine Ebene E, die durch $\mathfrak{op}$ und die Polargerade von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) geht. Man kann nun beweisen, dass die Ebene E den Kegel K längs $\mathfrak{op}$ berührt.

In der That, die Ebene, welche durch $\mathfrak{i}$ geht und O in $\mathfrak{l}$ berührt, enthält eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen, nämlich die Geraden $\mathfrak{lm}, \mathfrak{ln}$, Generatrixen der Fläche, die Gerade $\mathfrak{li}$, Generatrix des umschriebenen Kegels vom Scheitel $\mathfrak{i}$, und die Gerade $\mathfrak{lj}$, Tangente des Berührungskegelschnittes in $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{j}$ sei ihre Spur auf der Ebene A). Projiciert man vom Puncte $\mathfrak{o}$ aus diese vier harmonischen Strahlen auf die Ebene A, so erhält man die Geraden $\mathfrak{p}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{i}, \mathfrak{j})$ [1]), die ebenfalls eine harmonische Gruppe bilden. Andererseits aber gehört das Ebenenpaar BC, der Kegel (BC) und die Quadrifläche (ABC) zu demselben Büschel, also muss der Kegelschnitt (A) durch die vier Puncte gehen, wo die Durchschnittsgeraden des Kegels mit A die Geraden AB und AC (d. h. $\mathfrak{pu}$ und $\mathfrak{pv}$) treffen. Daher ist also die Polargerade von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) die conjugierte harmonische Gerade $\mathfrak{pi}$ in Bezug auf die Geraden $\mathfrak{pu}, \mathfrak{pv}$, oder mit andern Worten, die Gerade $\mathfrak{pj}$ ist die Polare von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A).

Also ist die Ebene E Tangentialebene des Kegels längst $\mathfrak{op}$, und folglich *liegt der Punct* $\mathfrak{i}$ *nur auf einer einzigen Geraden* g.

254. Die Gerade g, die Reciproke der Geraden (BC) in Bezug auf alle Flächen des Büschels (BC), liegt (249) auf den Hyperboloiden J_B und J_C. Umgekehrt ist J_B der Ort der reciproken Geraden von BC (wo B fest ist, und C variabel) in Bezug auf die Flächen des Büschels (BC) und auch der Ort der reciproken Geraden von BA (wo B wieder fest ist und

[1]) Hier bezeichnen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ die Puncte $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$.

A variabel) in Bezug auf die Flächen (BA). Ebenso verhält es sich mit J_C. Wir haben nun bewiesen, dass durch jeden Punct des Raumes zwei Gerade g gehen, die Reciproken von BC, und dem analog zwei reciproke Gerade von CA, und zwei reciproke Gerade von AB. Also: *Durch jeden Punct des Raumes kann man zwei Hyperboloide* J_A, *zwei Hyperboloide* J_B *und zwei Hyperboloide* J_C *legen.* Aus dem Vorhergehenden folgt weiter, dass, wenn $\mathfrak{i}$ der Scheitel eines Quadrikegels ist, welcher F_3 in drei Kegelschnitten (A), (B), (C) schneidet, durch $\mathfrak{i}$ nur eine einzige Reciproke von BC, ebenso nur eine Reciproke von CA und eine einzige reciproke Gerade von AB geht; durch $\mathfrak{i}$ geht also nur ein Hyperboloid J_A, ein Hyperboloid J_B und ein Hyperboloid J_C. Das heisst: *Der Ort der Scheitel der Quadrikegel, welche die cubische Fläche* F_3 *in drei Kegelschnitten* (A), (B), (C) *schneiden, fällt mit der einhüllenden Fläche der Hyperboloide jeder der drei Reihen* J_A', J_B, J_C *zusammen. Dieser Ort geht durch die drei Raumcurven vierter Ordnung in denen* F_3 *von den Quadripolarflächen der Puncte* $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ *geschnitten wird* (252).

Da bewiesen, dass durch jeden Punct dieses Ortes eine einzige eingehüllte Fläche jeder Reihe geht, so folgt, dass die einhüllende und die eingehüllte Fläche sich überall berühren, wo sie sich treffen. Die Berührungscurve ist der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender eingehüllten Flächen und ist also von der vierten Ordnung. *Die einhüllende Fläche ist also von der vierten Ordnung; die Berührungscurven zweier eingehüllter Flächen derselben Reihe liegen auf ein und derselben Fläche zweiter Ordnung* (50) *u. s. w.*

255. Wir betrachten jetzt das Büschel von Quadriflächen S, welche durch die Curve vierter Ordnung gehen, die den Durchschnitt von F_3 mit O, der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, bildet. Zwei Flächen S schneiden die cubische Fläche nochmals in zwei Kegelschnitten; da aber die gemeinschaftliche Gerade der Ebenen dieser Kegelschnitte vier Puncte mit F_3 gemein hat (nämlich die vier Puncte, in denen dieselbe die beiden Kegelschnitte trifft), so liegt sie vollständig auf der Fläche. Nun ist eine der Flächen S auch die Quadrifläche O, für welche der resultierende Kegelschnitt das Geradenpaar b_2, c_{12} ist, und die Gerade, in der die Ebene dieser beiden nochmals F_3 schneidet, ist die Gerade a_1, also schneiden die Flächen S die Flächen F_3 in Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Gerade a_1 gehen. Umgekehrt trifft jede durch a_1 gezogene Ebene A, F_3 in einem Kegelschnitte, der auf einer Fläche S_A des Büschels liegt, das man betrachtet. Die Ebene A und die Quadriflächen S_A bilden offenbar zwei projectivische Büschel, welche die gegebene Fläche F_3 durch ihre Durchschnittscurven erzeugen können (222).

Die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Quadriflächen S bilden ein projectivisches Büschel zu dem dieser Quadriflächen, also ist der Ort der Berührungskegelschnitte der Quadriflächen S mit den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$ (223) eine Fläche **J** dritter Ordnung, welche durch die Basis des Büschels (S) und durch die Geraden b_2, c_{12} geht (letztere Geraden der Durchschnitt von O durch die entsprechende Polarebene). Ausser-

dem ist die Basiscurve des Büschels (S) der Durchschnitt von **J** mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf **J**, nämlich mit der Quadrifläche $S(\equiv O)$, die durch $\mathfrak{o}$ geht; die beiden cubischen Flächen **J** und F_3 berühren sich also längs einer Curve vierter Ordnung und schneiden sich in zwei Geraden; sie fallen daher in eine einzige Fläche zusammen. Das heisst: *Jede Quadrifläche S_A schneidet F_3 in einem Kegelschnitt dessen Ebene A die Polarebene des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S_A ist;* mit andern Worten, die cubische Fläche F_3 ist der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen S und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$. Es folgt noch daraus, dass die Scheitel der vier Kegel des Büschels (S) auf F_3 liegen, und dass diejenigen Ebenen, welche die Fläche in diesen vier Puncten berühren, die dreifachen Tangentialebenen sind, welche durch a_1 gehen.

256. Sind A und B zwei gegebene Ebenen bezüglich durch a_1 und b_2 gelegt, dann bilden die Quadriflächen (AB) ein Büschel, dem auch das Ebenenpaar A, B angehört. Der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$ ist nach dem allgemeinen Satze (223) eine cubische Fläche, aber für die Quadrifläche, die aus den Ebenen A, B besteht, kann man die Berührungscurve als auf der Ebene B ausgebreitet ansehen, und die Ebene gehört also vollständig der cubischen Fläche an. Das heisst, diese reduciert sich auf die Ebene B und eine Quadrifläche $\mathfrak{S}$, welche den Kegelschnitt (A) und die Kegelschnitte enthält, welche aus dem Durchschnitt der Flächen (AB) mit den Polarebenen von $\mathfrak{o}$ entstehen.

Weiter muss die Basis des Büschels (AB) die Durchschnittscurve der cubischen Fläche $B\mathfrak{S}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Fläche sein, also ist A die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $\mathfrak{S}$. Es folgt ferner daraus, dass $\mathfrak{S}$ durch die Scheitel der beiden Kegel des Büschels (AB) geht und in ihnen von den beiden Ebenen berührt wird, welche dem Büschel der Polarebenen von $\mathfrak{o}$ angehören, und sich daher in einer Geraden schneiden, die in der Ebene B liegt.

Hiernach gehen die Flächen $\mathfrak{S}$ und S_A zugleich durch den Kegelschnitt (A) und haben A als Polarebene von $\mathfrak{o}$. Wenn man nun vom Puncte $\mathfrak{o}$ die Tangenten an den Kegelschnitt (B) zieht, so liegen die Berührungspuncte auf $\mathfrak{S}$, denn sie müssen einer beliebigen Quadrifläche des Büschels (AB) angehören und der entsprechenden Polarebene von $\mathfrak{o}$. Die nämlichen Puncte gehören aber auch der Berührungscurve von F_3 mit dem umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ an, und folglich auch S_A. Die Quadriflächen $\mathfrak{S}$ und S_A bilden also nur eine einzige Fläche. Das heisst: *S_A ist der Ort der Berührungscurven aller Quadriflächen (ABC), wo A fest ist, mit den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$.* Also enthält S_A die Scheitel sämmtlicher Kegel des Systems (ABC), wo A fest gehalten wird.

Ist die Ebene A gegeben, dann sind die Scheitel der Kegel (ABC) auf jeder der Flächen S_A, J_A gelegen (249), also: *Der Ort dieser Scheitel ist die Raumcurve vierter Ordnung, Durchschnitt dieser beiden Quadriflächen.* Lässt

man nun A seine Lage ändern, *so ist der Ort dieser Raumcurve, die den beiden entsprechenden Flächen S_A und J_A gemein ist, eine Fläche vierter Ordnung (vollständiger Ort der Scheitel aller Kegel (ABC))*, die wir schon als Enveloppe der Hyperboloide J gefunden haben. Natürlich ist dieselbe Fläche vierter Ordnung auch der Ort der Raumcurve vierter Ordnung, die zwei Flächen S_B und J_B oder S_C und J_C gemein ist. S_B und S_C haben hier in Bezug auf $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und die Ebenen B, C dieselbe Bedeutung, welche S_A in Bezug auf den Punct $\mathfrak{o}$ und die Ebene A hat [1]).

257. Betrachten wir von Neuem die drei Geraden a_1, b_2, c_{12} die in derselben Tritangentialebene liegen. Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Ebenen, die bezüglich durch a_1, b_2 gehen und die Fläche F_3 in zwei Kegelschnitten treffen, die a_1, b_2 in den Puncten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ berühren. Die Quadriflächen des Büschels ($\mathcal{A}\mathcal{B}$) treffen die Ebene $a_1 b_2$ in Kegelschnitten, die in den Puncten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ einen doppelten Contact haben, und umgekehrt jeder Kegelschnitt, der in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von den Geraden a_1, b_2 berührt wird, ist die Spur einer Fläche des Büschels. Nun befindet sich unter diesen Kegelschnitten der unendlich abgeplattete Kegelschnitt $(\mathfrak{ab})^2$ gebildet durch die zweimal gezählte Berührungssehne, und in dem Büschel ($\mathcal{A}\mathcal{B}$) gibt es daher einen Kegel, welcher die Gerade $a_1 b_2$ längs der Geraden $\mathfrak{ab}$ berührt. Diese Gerade trifft c_{12} in einem Puncte $\mathfrak{c}$ und in diesem berührt c_{12} den obigen Kegel und folglich auch einen Kegelschnitt, der gleichzeitig auf F_3, auf dem Kegel und in einer Ebene $\mathcal{C}$ (durch c_{12}) liegt. Also: *Die sechs Puncte, in denen die Geraden a_1, b_1, c_{12} die parabolische Curve von F_3 berühren* (220) *liegen zu drei und drei auf vier Geraden, welche die Berührungsgeneratrixen der Ebene $a_1 b_2 c_{12}$ mit vier Quadrikegeln sind, welche zu drei und drei die sechs Kegelschnitte* ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{B}$), ($\mathcal{C}$) *enthalten, welche die Geraden a_1, b_2, c_{12} in genannten Puncten berühren.* Die beiden zu $\mathfrak{a}$ analogen Puncte sind die Doppelelemente einer Involution, in der die Puncte $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$ conjugiert sind (220). Die Geraden a_1, b_2, c_{12} sind daher die Diagonalen des Vierseits, das aus vier Geraden $\mathfrak{abc}$ gebildet wird.

Es gibt noch einen zweiten Kegel, der durch die Kegelschnitte ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{B}$) geht, ausser demjenigen, welcher die Ebene $a_1 b_2$ längs $\mathfrak{abc}$ berührt. Die beiden Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten umhüllen diese beiden Kegel; der Scheitel des neuen Kegels ist also der gemeinschaftliche Durchschnittspunct folgender drei Ebenen: Der Ebene $a_1 b_2$, der Ebene der Tangenten, die man vom Puncte $a_1 b_2$ an die beiden Kegelschnitte ziehen kann ausser a_1 und b_2 und die Ebene der Polargeraden des nämlichen Punctes in Bezug auf die beiden Kegelschnitte.

Wir wollen die vier Berührungskegel der Ebene $a_1 b_2$ und die sechs Kegelschnitte, in denen sie die Fläche F_3 schneiden, in folgender Weise bezeichnen

$$\mathcal{H} \equiv (\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}),\ \mathcal{H}' \equiv (\mathcal{A}\mathcal{B}'\mathcal{C}'),\ \mathcal{H}'' \equiv (\mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{C}'),\ \mathcal{H}''' \equiv (\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C})$$

[1]) Jede von den 45 dreifachen Tangentialebenen gibt einer analogen Fläche vierter Ordnung Entstehung.

Die Kegel $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ schneiden sich in dem Kegelschnitt $(\mathfrak{A})$ und folglich noch in einem andern Kegelschnitt, der nicht auf F_3 liegt. Sie haben also zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen; eine ist $a_1 b_2 c_{12}$, die andere sei P. Die Ebene P berührt die fünf Kegelschnitte $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B}), (\mathfrak{C}), (\mathfrak{B}'), (\mathfrak{C}')$ die auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ liegen, sie berührt daher auch die Kegel $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$. Die vier Kegel $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \mathfrak{K}'''$ haben folglich zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen $a_1 b_2 c_{12}$ und P, daraus folgt, *dass ihre Scheitel auf ein und derselben Geraden liegen* (der Durchschnittsgeraden der Ebenen $a_1 b_2 c_{12}$ und P).

258. Wir gehen zur Betrachtung der Kegelschnitte (A), (B), (C) über, die sich in gerade Linien auflösen.

Unter den Ebenen A gibt es vier, ausser $a_1 b_2 c_{12}$, welche F_3 in Geradenpaaren schneiden, dasselbe gilt für die Ebenen B und C. Wenn wir die Ebene A betrachten, welche die Geraden $b_3 c_{13}$ enthält, und die Ebene B, in der $a_3 c_{32}$ liegt, so müssen sich die Kegelschnitte $(b_3 c_{13}), (a_3 c_{32})$ in zwei Puncten schneiden (247), die auf der Geraden AB liegen. Die Gerade b_3 trifft daher c_{23}, und c_{13} schneidet a_3. Die Ebenen $b_3 c_{32}$, $a_3 c_{13}$ schneiden F_3 in zwei neuen Geraden a_2 und b_1. Nun liegen von den neun Geraden $(a_1 b_2 c_{13}), (a_2 b_3 c_{32}), (a_3 b_1 c_{13})$, welche durch den Durchschnitt von F_3 mit drei Ebenen entstehen, drei, nämlich a_1, b_3, c_{13} in der Ebene A, drei andere a_3, b_2, c_{32} in der Ebene B, folglich liegen die drei übrigen a_2, b_1, c_{12} in ein und derselben Ebene C.

Hieraus folgt, dass die 24 Geraden, die in den 12 dreifachen Tangentialebenen liegen, welche ausser $a_1 b_2 c_1$ durch a_1, b_2, c_{12} gehen, auch noch in 16 andern Paaren von dreifachen Tangentialebenen liegen. Jedes dieser Paare ist durch zwei beliebig gewählte dreifache Tangentialebenen A und B bestimmt. Mittelst dieser beiden Ebenen ist auch eine entsprechende Ebene C mit bestimmt.

Denken wir uns drei Ebenen A, B, C die F_3 ausser in a_1, b_2, c_{12} in sechs Geraden schneiden, die nicht in Ebenenpaaren gelegen seien, so gehören diese sechs Geraden einem Hyperboloide (ABC) aus dem vorhin betrachteten Systemen an (248). Jede von den vier Ebenen A lässt sich mit jeder von den vier Ebenen B und mit jeder der vier Ebenen C combinieren, aber man muss die 16 Combinationen weglassen, welche sechs Gerade ergeben, die auf zwei Ebenen liegen; *das System der Quadriflächen* (ABC) *enthält also* $4.4.4-16=48$ *Hyperboloide* H, *von denen ein jedes die cubische Fläche* F_3 *in sechs Geraden schneidet.*

Von den sechs Geraden, die F_3 und einem Hyperboloide H gemein sind, gehören drei demselben Systeme von Generatrixen des letzteren an, und die drei übrigen dem andern Systeme [1]), man kann also auf sechs ver-

---

[1]) Eine cubische Fläche kann niemals vier Gerade eines Hyperboloids aus demselben Systems von Generatrixen enthalten, denn dann hätte jede Generatrix des andern Systems vier Puncte mit der cubischen Fläche gemein und läge folglich vollständig auf derselben.

schiedene Arten diese Geraden in drei Paare zerlegen, so dass die Geraden jedes Paares in einer Ebene liegen. Jede Art gibt drei Ebenen, welche alle sechs Geraden enthalten und F_3 in drei neuen Geraden schneiden, die in einer Ebene liegen, denn die sechs ersten Geraden gehören einer Fläche zweiter Ordnung an. *Jedes Hyperboloid H ist also ein Glied von sechs Systemen von Quadriflächen, dem der Flächen (ABC) analog, das durch die Ebene $a_1 b_2 c_{12}$ gegeben ist.* Die Zahl dieser Systeme ist 45, jedes derselben entspricht einer dreifachen Tangentialebene, *die Gesammtzahl der Hyperboloide, welche F_3 in sechs Geraden schneiden, ist also* $\frac{48.45}{6} = 360$.

259. Ein Hyperboloid H ist durch drei Gerade von F_3 bestimmt, die sich nicht treffen. Nun werden aber drei Gerade von F_3, die sich nicht treffen, von drei andern Geraden geschnitten, die sich ebenfalls nicht schneiden (228); diese sechs Geraden bilden also den Durchschnitt von H und F_3. Das heisst: *Jedes Hyperboloid, das F_3 in drei Geraden schneidet, die sich nicht treffen, schneidet diese Fläche noch in drei andern Geraden.*

Es gibt also 2.360 Gruppen von drei Geraden auf F_3, welche keine Durchschnittspuncte haben. Diese Gruppen sind zu zwei und zwei conjugiert [1]. *Die Geraden der einen Gruppe treffen die Geraden der conjugierten Gruppe, und die sechs Geraden der beiden conjugierten Gruppen gehören ein und demselben Hyperboloide an.*

CAPITEL VI.

VERSCHIEDENE EIGENSCHAFTEN.

260. Es seien T, T' zwei dreifache Tangentialebenen der cubischen Fläche F_3, die sich in einer Geraden, die nicht auf F_3 liegt, treffen, und es seien a_1, b_2, c_{12}; a_2, b_3, c_{23} die Geraden der Fläche, die in diesen Ebenen liegen. Da die Gerade TT' die Fläche F_3 nur in drei Puncten schneidet, so müssen diese den Geradenpaaren $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ gemein sein. Die Ebenen $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ treffen F_3 in drei neuen Geraden bezüglich c_{13}, a_3, b_1, die in einer Ebene liegen, denn von diesen neun Geraden, die durch den Durchschnitt von F_3 mit drei Ebenen entstehen, liegen sechs in zwei anderen Ebenen T, T'.

Also bestimmen die Dreiecke $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ vier andere, und die Seiten

---

[1]) R. Sturm, (*Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig 1868.) nennt zwei conjugierte Systeme von drei Geraden ein *Doppeldrei* und die Hyperboloide H *Doppeldreihyperboloide*.

dieser sechs Dreiecke sind die gegenseitigen Durchschnittspuncte zweier Gruppen von drei Ebenen, das heisst der Seitenflächen zweier Trieder, die wir *conjugiert* nennen wollen.

Zwei beliebige dreifache Tangentialebenen, deren Durchschnittsgerade nicht auf F_3 liegt, können als Seitenflächen eines Trieders dienen, dann ist dadurch die dritte Seitenfläche mit bestimmt. Diese drei Ebenen bestimmen neun Gerade, welche sich in neun Puncten schneiden, die den Kanten des Trieders und F_3 gemein sind. Dieselben neun Geraden sind auch noch in drei andere Ebenen vertheilt, welche das conjugierte Trieder bilden.

Man hat schon früher (258) gesehen, dass, wenn man die drei Geraden a_1, b_2, c_{12}, die in der Ebene T liegen, betrachtet, die andern 24 Geraden von F_3 in 16 Ebenenpaaren vertheilt liegen. Jedes Paar bildet mit T ein Trieder, das heisst, jede Ebene T liegt in 16 Triedern. Jedes Trieder enthält aber drei Tritangentialebenen, *also ist die Gesammtzahl der Trieder* $\frac{45.16}{3} = 240$. Diese Trieder sind zu zwei und zwei conjugiert; *es gibt daher* 120 *conjugierte Triederpaare.*

261. Die neun Geraden

$$\begin{vmatrix} a_1, b^1, c_{23} \\ a_2, b_2, c_{31} \\ a_3, b_3, c_{12} \end{vmatrix}$$

sind, wie wir eben bewiesen haben, auf sechs Tritangentialebenen gelegen, die zwei conjugierte Trieder bilden. Durch jede dieser Geraden kann man drei neue dreifache Tangentialebenen legen; es gibt also 27 Ebenen, von denen jede eine der neun Geraden enthält und also auch noch zwei andere Gerade, das heisst, die andern 18 Geraden liegen zu zwei und zwei in diesen 27 Ebenen vertheilt in der Art, dass diese Ebenen $\frac{2.27}{18} = 3$-mal durch jede der 18 Geraden gehen. Es bleiben noch $45-6-27 = 12$ Ebenen, welche ausschliesslich die 18 Geraden jede zweimal enthalten.

Nun muss jede der drei Geraden a_1, b_2, c_{12}, die in derselben Ebene liegen, ausser den Geraden der obigen Matrix noch sechs Gerade schneiden, die von den beiden andern nicht getroffen werden; also werden die 18 Geraden durch eine oder die andere der Geraden a_1, b_2, c_{12} geschnitten. Ausserdem werden aber auch drei Gerade wie a_1, b_1, c_{23}, die sich nicht schneiden, durch die obigen Geraden ebenfalls geschnitten, ebenso a_1, a_2, a_3, u. s. w. Man kann daher die 18 Geraden in zwei neue Matrixen

$$\begin{vmatrix} b_4, a_4, c_{56} \\ b_5, a_5, c_{64} \\ b_6, a_6, c_{45} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} c_{14}, c_{24}, c_{34} \\ c_{15}, c_{25}, c_{35} \\ c_{16}, c_{26}, c_{36} \end{vmatrix}$$

so vertheilen, dass die Geraden einer Colonne der ersten Matrix die Geraden

der entsprechenden Colonnen der zweiten Matrix treffen, und die Geraden einer Zeile der ersten Matrix die Geraden der entsprechenden Colonne der dritten Matrix. Dann ist leicht zu zeigen: 1. dass die Geraden einer Zeile der zweiten Matrix die Geraden der entsprechenden Zeile der dritten Matrix schneiden; 2. dass die neun Geraden jeder der zwei letzten Matrixen die Durchschnittsgeraden der Seitenflächen zweier conjugierter Trieder sind.

Also: *Jedes conjugierte Triederpaar bestimmt zwei neue Paare in der Art, dass die drei Paare zweimal sämmtliche 27 Gerade enthalten.* Natürlich ist die Zahl dieser Gruppen von je drei conjugierten Triederpaaren gleich $\frac{120}{3} = 40$.

262. Die 240 Trieder haben $3.240 = 720$ Kanten k und 240 Scheitel $\mathfrak{t}$. Jede Kante k trifft die Fläche F_3 in drei Puncten $\mathfrak{d}$, Durchschnitte der Geradenpaare auf der Fläche. Man kann also sagen, *die* 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$, *Scheitel der* 45 *Dreiecke, die von den* 27 *Geraden auf den dreifachen Tangentialebenen gebildet werden, sind zu drei und drei auf* 720 *Geraden* k *vertheilt, die sich zu drei und drei in* 240 *Puncten* $\mathfrak{t}$ *schneiden.* Dieselben 135 Puncte liegen zu zehn und zehn auf den 27 Geraden von F_3.

Betrachten wir den Punct $\mathfrak{d}$, der den Geraden a_1, b_2 angehört. Durch jede dieser Geraden gehen ausser der Ebene $a_1 b_2$ vier andere dreifache Tangentialebenen und daher 16 Gerade k. *Jeder Punct* $\mathfrak{d}$ *ist also auf* 16 *Geraden* k *gelegen.*

Die Ebene $a_1 b_3 c_{13}$ schneidet die vier dreifachen Tangentialebenen, welche durch b_2 gehen, mit Ausnahme von $a_1 b_2$, in vier Geraden k welche b_3 und c_{13} in acht Puncten $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ treffen. Auf jeder dieser vier Geraden k denke man sich den harmonischen Punct $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ genommen, dann gehören die vier Puncte $\mathfrak{l}$ der Polargeraden von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf den Kegelschnitt an, der durch die Geraden $b_3 c_{13}$ gebildet wird, und sie liegen auch auf der Quadripolarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf F_3. *Die* 16 *Puncte* $\mathfrak{l}$, *entsprechend den* 16 *Geraden* k, *die von* $\mathfrak{d}$ *ausgehen, liegen zu vier und vier auf vier Geraden vertheilt, die in vier Ebenen liegen, welche durch* a_1 *gehen und folglich auch auf vier anderen Geraden, die in vier Ebenen durch* b_2 *liegen. Alle diese acht Gerade sind Generatrixen ein und desselben Hyperboloids, welches die Quadripolarfläche des Punctes* $\mathfrak{d}$ *ist.* Diese Quadrifläche geht offenbar durch die Geraden a_1 und b_2.

263. Sei $\mathfrak{t}$ der Scheitel eines Trieders, das aus dreifachen Tangentialebenen gebildet ist (262). Dann schneidet die Quadripolarfläche von $\mathfrak{t}$ nach F_3 genommen jene Ebenen in den Polarkegelschnitten von $\mathfrak{t}$ bezüglich der Dreiecke, welche von den Geraden von F_3 gebildet werden, die in diesen Ebenen liegen, das heisst, in Kegelschnitten, die bezüglich diesen Dreiecken umgeschrieben sind. Diese Dreiecke entstehen aber durch den Durchschnitt der drei betrachteten Ebenen durch die Seitenflächen des conjugierten Trieders (260), folglich treffen die Kanten dieses Trieders die Quadripolarfläche von

$\mathfrak{t}$ in je drei Puncten. Mit andern Worten: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{t}$ *ist ein dem conjugierten Trieder umgeschriebener Kegel. Also sind die Scheitel zweier conjugierter Trieder entsprechende Puncte der Hessiana* (183).

264. Es ist früher bewiesen, dass jede Gerade, die auf F_3 liegt, so wie a_1, eine Doppeltangente der Hessiana ist (171), und dass die Berührungspuncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die Doppelpuncte der Involution sind, welche auf a_1 durch die Kegelschnitte bestimmt wird, in denen F_3 durch die Bitangentialebenen, welche durch a_1 gehen, geschnitten wird. Da aber die Gerade a_1 auf F_3 liegt, so muss die Quadripolarfläche jedes Punctes dieser Geraden durch diese selbst hindurch gehen, also liegen die Scheitel der Polarkegel von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf a_1. Diese Scheitel sind aber auch Puncte der Hessiana, folglich ist $\mathfrak{a}'$ der Scheitel des Polarkegels von $\mathfrak{a}$ und umgekehrt; das heisst, *die Puncte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ *sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana.*

265. Eine beliebig gegebene Ebene E schneidet die Fundamentalfläche F_3 in einer Curve $\mathfrak{c}_3$ der dritten Ordnung. Die Ebene M, welche F_3 in einem Puncte $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{c}_3$ berührt, und die Polarebene von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die Hessiana treffen sich in einer Geraden, welche F_3 in den Wendepuncten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ des Schnittes dieser Fläche durch die Ebene M durchbohrt (200). Was ist nun der Ort der Geraden $\mathfrak{m}\mathfrak{x}, \mathfrak{m}\mathfrak{y}, \mathfrak{m}\mathfrak{z}$, wenn $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{c}_3$ seine Lage verändert? Zunächst ist die Curve $\mathfrak{c}_3$ für den Ort dreifach, denn jeder Punct $\mathfrak{m}$ dieses Ortes ist den drei Generatrixen $\mathfrak{m}\mathfrak{x}, \mathfrak{m}\mathfrak{y}, \mathfrak{m}\mathfrak{z}$ gemeinschaftlich. Wir suchen zweitens, wieviele Generatrixen in die Ebene E fallen. Die Polarebenen der Puncte $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die Hessiana treffen E in Geraden, deren einhüllende Curve von der 9-ten Classe ist (93). Die Tangenten dieser Enveloppe entsprechen einzeln den Tangenten von $\mathfrak{c}_3$, denn die einen sowohl als die anderen entsprechen den Puncten dieser Curve; und nach einen bekannten Theorem [1]) ist die Ordnung des Ortes des gemeinschaftlichen Punctes zweier entsprechender Tangenten gleich der Summe der Classen der beiden Enveloppen, nämlich $9+6=15$. Für diesen Ort sind die 12 gemeinschaftlichen Puncte von $\mathfrak{c}_3$ und der Hessiana Doppelpuncte, denn in jedem dieser Puncte treffen sich zwei unmittelbar folgende Tangenten von $\mathfrak{c}_3$ und die entsprechenden Tangenten der Enveloppe 9-ter Classe. Der Ort fünfzehnter Ordnung schneidet also $\mathfrak{c}_3$ noch in $3.15-2.12=21$ andern Puncten, von denen jeder ein den Puncten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ analoger Pnnct ist. Es folgt daraus, dass die Ebene E 21 zu $\mathfrak{m}\mathfrak{x}, \mathfrak{m}\mathfrak{y}, \mathfrak{m}\mathfrak{z}$ analoge Gerade enthält, und hieraus, *dass der Ort dieser Geraden eine Fläche der Ordnung* $3.3+21=30$ *ist.*

Dieser Ort trifft eine beliebige Gerade g in 30 Puncten. Daraus folgt: *Wenn der Punct* $\mathfrak{m}$ *die Fläche* F_3 *mit der Bedingung durchläuft, dass eine der Geraden* $\mathfrak{m}\mathfrak{x}, \mathfrak{m}\mathfrak{y}, \mathfrak{m}\mathfrak{z}$ *die gegebene Gerade* g *schneidet, so ist der Ort von* $\mathfrak{m}$ *eine Raumcurve der 30-sten Ordnung.*

---

1) *Einleitung*, Nr. 83 a.

Diese Raumcurve geht, was auch g sei, durch die 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$, *in denen sich die* 27 *Geraden der Fundamentalfläche zu zwei und zwei schneiden.* In der That, betrachten wir die dreifache Tangentialebene, welche die Geraden a_1, b_2, c_{12} enthält, so geht die Polarebene des Punctes $a_1 b_2$ in Bezug auf die Hessiana durch c_{12} [1]), und jede durch diesen Punct so gezogene Gerade, dass sie c_{12} schneidet, ist eine zu $\mathfrak{mx}$ analoge Gerade. Nun trifft die Ebene $a_1 b_2 c_{12}$ eine beliebige Gerade g, also geht die Raumcurve 30-ster Ordnung, in Bezug auf diese Gerade, durch den Punct $a_1 b_2$. Daher trifft die Raumcurve, um die es sich handelt, jede der 27 Geraden von F_3 in zehn Puncten.

Hieraus folgt, wenn man die cubische Fläche auf einer Ebene in der oben (231) angegebenen Weise abbildet, dass dann die Plancurve, welche die Raumcurve 30-ster Ordnung in Bezug auf g darstellt, ebenfalls von der 30-sten Ordnung ist, zehnmal durch jeden Fundamentalpunct geht und in denselben die den Geraden b und c von F_3 entsprechenden Linien berührt. Also (233, 245) *ist die Raumcurve der vollständige Durchschnitt von* F_3 *mit einer Fläche* 10-*ter Ordnung.*

Es gibt also eine unbegrenzte Zahl von Flächen 10-*ter Ordnung, welche durch die* 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$ *gehen. Das vollständige System dieser Puncte ist durch den Durchschnitt irgend einer dieser Flächen mit den* 27 *Geraden von* F_3 *gegeben.*

266. Wir wollen jetzt noch eine Eigenschaft des Schnittes der Hessiana durch eine beliebige Ebene E auseinandersetzen.

Diese Ebene schneidet die Fundamentalfläche F_3 in einer cubischen Curve $\mathfrak{c}_3$; es sei $\mathfrak{o}$ einer der Pole von E in Bezug auf F_3, der nicht auf E liegt. Weil nun der Kegel $\mathfrak{oc}_3$ die Fläche F_3 in einer Plancurve $\mathfrak{c}_3$ trifft, so schneidet er dieselbe Fläche noch in einer Raumcurve sechster Ordnung, die auf einer Quadrifläche $\mathfrak{P}_2$ liegt (40). Da die Fläche F_3 dem durch den Kegel $\mathfrak{oc}_3$ und den zusammengesetzten Ort $E\mathfrak{P}_2$ gebildeten Büschel angehört, so geht die Quadripolarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{i}$ in Bezug auf F_3 durch den Durchschnitt des Polarkegels $\mathfrak{oc}_2$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{oc}_3$ mit der Quadripolarfläche in Bezug auf $E\mathfrak{P}_2$. Wird $\mathfrak{i}$ auf der Ebene E genommen, so ist die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf $E\mathfrak{P}_2$ das System zweier Ebenen, deren eine E ist, und die andere $\mathfrak{P}_1$ ist die Polarebene von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf $\mathfrak{P}_2$. Folglich geht die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf

[1]) Dies ergibt sich aus dem allgemeinen Theoreme (200) und auch aus folgender Ueberlegung: Die vier Durchschnittspuncte der Hessiana mit der Geraden a_1 sind in zwei Berührungspuncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ vereinigt, und folglich fällt der harmonische Mittelpunct dieser vier Durchschnittspuncte in Bezug auf den Pol $a_1 b_2$ mit dem Puncte $a_1 c_{12}$ zusammen, dem harmonisch conjugierten Puncte von $a_1 b_2$ in Bezug auf die Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$. Ebenso verhält es sich für b_2, also u. s. w.

F_3 durch die beiden Durchschnittskegelschnitte des Kegels $\mathfrak{o}\mathfrak{c}_2$ mit den Ebenen E und $\mathfrak{P}_1$. Der erste dieser Kegelschnitte ist offenbar $\mathfrak{c}_2$, erste Polare von $\mathfrak{i}$ nach $\mathfrak{c}_3$; der andere ist ein Geradenpaar, weil die Ebene $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{o}$ geht [1]). Wenn nun aber $\mathfrak{P}_1$ den Kegel $\mathfrak{o}\mathfrak{c}_2$ berührte, so wäre die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ nach F_3 genommen ein Kegel, und $\mathfrak{i}$ würde auf der Hessiana liegen. *Also ist die Durchschnittscurve der Hessiana mit der Ebene E der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Quadrifläche $\mathfrak{P}_2$ die conische Polarcurve in Bezug auf die cubische Curve $\mathfrak{c}_3$ berührt.*

Auf folgende Weise kann man zeigen, dass dieser Ort von der vierten Ordnung ist. Die Polarkegelschnitte der Puncte einer Geraden g auf E in Bezug auf $\mathfrak{c}_3$ und die Polargeraden derselben Puncte in Bezug auf den Kegelschnitt $(E\mathfrak{P}_2)$ bilden zwei projectivische Büschel, welche eine cubische Curve erzeugen, die durch den Pol von g in Bezug auf den Kegelschnitt $(E\mathfrak{P}_2)$ geht. Durch diesen Pol kann man vier Tangenten an die cubische Curve legen, es gibt also vier Gerade des zweiten Büschels, welche die entsprechenden Kegelschnitte des ersten Büschels berühren, daher enthält g vier Puncte des Ortes.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

CAPITEL VII.

CLASSIFICATION DER FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG MIT RÜCKSICHT AUF DIE REALITÄT DER SIEBENUNDZWANZIG GERADEN.

267. Wir haben bewiesen, dass wir durch die 27 Geraden einer allgemeinen Fläche F_3 dritter Ordnung 120 conjugierte Triederpaare legen können (260), und dass umgekehrt die Fläche construiert werden kann, wenn zwei conjugierte Trieder und ein Punct der Fläche gegeben sind (221). Daraus folgt, dass, abgesehen von der Realität der gegebenen oder gesuchten Ele-

---

[1]) Die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug den Kegel $\mathfrak{o}\mathfrak{c}_3$ ist unbestimmt, und $\mathfrak{o}$ hat also dieselbe Polarebene E in Bezug anf F_3 und in Bezug auf den zusammengesetzten Ort $E\mathfrak{P}_2$. Die Ebene E ist daher die Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $\mathfrak{P}_2$, und folglich geht die Polarebene eines beliebigen Punctes von E in Bezug auf die nämliche Quadrifläche durch $\mathfrak{o}$.

mente, es möglich ist, eine beliebige cubische Fläche mit Hilfe zweier Trieder auf die früher (221) gegebene Weise zu erhalten. Wir wollen jetzt auf die Realität oder Nichtrealität der 27 Geraden einer reellen cubischen Fläche Rücksicht nehmen. Indem wir die beiden Trieder zu bilden suchen, die die Fläche zu erzeugen genügen, werden wir ganz natürlich auf die Classification der allgemeinen reellen cubischen Flächen nach der Methode Schäflis [1]) gelangen.

Um zwei conjugierte Trieder zu construieren, die einen reellen Complex bilden, genügt es zwei dreifache Tangentialebenen T, T' zu finden (260), die reell oder imaginär conjugiert sind, und sich in einer nothwendigerweise reellen Geraden schneiden, die nicht auf der Fläche liegt. Die drei Geraden der Fläche auf T und die drei in T' enthaltenen Geraden schneiden sich zu zwei und zwei in den drei Puncten, in denen die Gerade TT' die Fläche durchdringt und bestimmen auf diese Weise drei Ebenen $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$, die sämmtlich reell sind, oder wenigstens die eine reell und die beiden andern imaginär conjugiert, genau wie die genannten drei Puncte. Jede dieser Ebenen $\mathfrak{T}$ schneidet die Fläche in einer andern Geraden, und diese drei neuen Geraden liegen in einer einzigen reellen Ebene T''. Die beiden Tripel von Ebenen $TT'T''$, $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$ bilden die gesuchten Trieder.

Nun behaupte ich, dass, solange die Fläche als reell vorausgesetzt wird, es immer möglich ist, zwei dreifache Tangentialebenen zu finden, welche der vorgeschriebenen Bedingung genügen. Dies ist klar, wenn die 27 Geraden sämmtlich reell sind; wir nehmen deshalb an, es gäbe imaginäre Gerade, die natürlich zu zwei und zwei imaginär conjugiert sind.

Zunächst seien a_1, b_3 zwei imaginär conjugierte Gerade, die in derselben Ebene [2]) liegen, die reell sein muss, dann gehen durch a_1 vier andere imaginäre Ebenen und durch b_3 ihre Conjugierten. Zwei dieser conjugierten Ebenen, eine durch a_1 und die andere durch b_3, genügen offenbar der Aufgabe. Denn die beiden Ebenen gemeinsame Gerade kann nicht auf der Fläche liegen, da andernfalls drei Gerade sich in demselben Puncte der Fläche schneiden müssten, der also für die Fläche ein Doppelpunct wäre.

Seien zweitens b_2, b_3 zwei imaginäre conjugierte Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen; $a_1, a_4, a_5, a_6, c_{23}$ die fünf Geraden, welche dieselben schneiden, und die einen reellen Complex bilden. Es muss also unter denselben eine ungerade Zahl reeller Geraden geben. Sind die fünf Geraden sämmtlich reell, so geht durch jede von ihnen wenigstens eine reelle Ebene; unter diesen fünf Ebenen ist es nun immer möglich, zwei auszuwählen, welche der verlangten Bedingung Genüge leisten. Sei in der That $a_1 b_2 c_{14}$ die reelle Ebene durch a_1; wäre dann die Ebene $c_{23} c_{15} c_{64}$ oder die Ebene $c_{23} c_{16} c_{45}$

---

1) *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosophical Transactions 1863).

2) Man lese stets *dreifache Tangentialebene.*

reell, so hätte man schon die beiden gesuchten Ebenen. Wäre dagegen nur die Ebene $c_{23} c_{14} c_{56}$ durch c_{23} reell, so müsste die Gerade c_{14}, da sie auf zwei reellen Ebenen läge, reell sein. Also ist auch c_{56} eine reelle Gerade und daher wäre die Ebene $a_5 b_6 c_{56}$ reell. Somit würden die Ebenen $a_1 b_4 c_{14}$, $a_5 b_6 c_{56}$ das verlangte Paar bilden.

Gibt es unter den fünf Geraden, die b_2 und b_3 schneiden, zwei imaginär conjugierte a_1, c_{23}, so sind die Ebenen $a_1 b_3$, $b_3 c_{23}$ imaginär conjugiert und schneiden sich in einer Geraden, die nicht auf der Fläche liegt.

Wir schliessen daher, dass jede reelle allgemeine Fläche dritter Ordnung mit Hilfe zweier Trieder gebildet werden kann, welche folgende drei Fälle darbieten.

1. Die Trieder sind aus sechs reellen Ebenen gebildet; 2. das eine Trieder ist vollständig reell, während das andere aus einer reellen Ebene und zwei imaginär conjugierten Ebenen besteht; 3. jedes Trieder besitzt eine reelle Ebene und zwei imaginär conjugierte Ebenen.

268. Erster Fall. Da die beiden Trieder von sechs reellen Ebenen gebildet werden, so schneiden sich diese in neun reellen Geraden:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ;$$
$$b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ;$$
$$c_{23}\ ,\ c_{31}\ ,\ c_{12}.$$

Das reelle durch die drei Geraden b_1, b_2, b_3 bestimmte Hyperboloid schneidet die cubische Fläche in drei neuen Geraden a_4, a_5, a_6 (258), die entweder sämmtlich reell sind, oder die eine reell die beiden andern imaginär conjugiert. Wir unterscheiden beide Fälle.

a) Die Geraden a_4, a_5, a_6 sind reell. Dann geben die Ebenen

$$b_1 a_4,\ b_1 a_5,\ b_1 a_6;$$
$$b_2 a_4,\ b_2 a_5,\ b_2 a_6;$$
$$b_3 a_4,\ b_3 a_5,\ b_3 a_6$$

neun weitere reelle Gerade:

$$c_{14},\ c_{15},\ c_{16}\ ;$$
$$c_{24},\ c_{25},\ c_{26}\ ;$$
$$c_{34},\ c_{35},\ c_{36}\ ,$$

und die Ebenen

$$c_{13} c_{24},\ c_{13} c_{25},\ c_{13} c_{26}$$
$$a_3 c_{34},\ a_3 c_{35},\ a_3 c_{36}$$

schneiden die Fläche in sechs neuen reellen Geraden:

$$c_{56},\ c_{46},\ c_{45}\ ;$$
$$b_4,\ b_5,\ b_6\ .$$

In diesem Falle hat man also 27 reelle Gerade.

β) Es sei a_5 eine reelle Gerade und a_4, a_6 imaginär conjugiert. Die reellen Ebenen

$$b_1 a_5, \; b_2 a_5, \; b_3 a_5$$

geben drei weitere reelle Gerade:

$$c_{15}, \quad c_{25}, \quad c_{35},$$

und die reellen Ebenen

$$c_{13} c_{25}, \; a_3 c_{35}$$

geben zwei andere reelle Gerade:

$$c_{46} \quad , \quad b_5.$$

Die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$b_1 a_4, \; b_1 a_6;$$
$$b_2 a_4, \; b_2 a_6;$$
$$b_3 a_4, \; b_3 a_6$$

geben die imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$c_{14}, c_{16};$$
$$c_{24}, c_{26};$$
$$c_{34}, c_{36}.$$

Endlich geben die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$a_1 c_{14}, a_1 c_{16};$$
$$c_{23} c_{14}, c_{23} c_{16}$$

zwei andere Paare imaginär conjugierter Geraden:

$$b_4, \; b_6$$
$$c_{56}, c_{54}.$$

Man hat also 15 reelle Gerade und 15 reelle Ebenen: 3 reelle Ebenen durch jede reelle Gerade und 3 reelle Gerade in jeder reellen Ebene. Zwei imaginär conjugierte Gerade schneiden sich nicht.

269. Zweiter Fall. Ein Trieder ist vollständig reell, das zweite hat eine reelle Seitenfläche, die beiden andern sind imaginär conjugiert. Die Ebenen des ersten Trieders werden von der reellen Seitenfläche des zweiten in drei reellen Geraden:

$$b_1, \; c_{13}, a_3$$

geschnitten, und von den imaginären Seitenflächen desselben Trieders in drei imaginär conjugierten Geradenpaaren:

$$b_2, \; c_{23};$$
$$b_3, \; a_1;$$
$$a_2, \; c_{12}.$$

Die imaginär conjugierten Hyperboloide, die durch die Geraden (b_1, b_2, b_3), (b_1, c_{23}, a_1) bestimmt sind, schneiden die cubische Fläche in zwei Tripeln imaginärer Geraden

$$(a_4, a_5, a_6), (c_{14}, c_{15}, c_{16}),$$

die zu zwei und zwei conjugiert sind. Dieselben bestimmen drei Ebenen $a_4 c_{14}, a_5 c_{15}, a_6 c_{16}$. Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem diese drei Ebenen sämmtlich reell sind, oder nur eine reell und die beiden andern imaginär conjugiert.

α). Die drei Ebenen sind reell, und also enthält jede von ihnen zwei conjugierte Gerade:

$$a_4, c_{14};$$
$$a_5, c_{15};$$
$$a_6, c_{16}.$$

Die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$b_2 a_4, c_{23} c_{14};$$
$$b_2 a_5, c_{23} c_{15};$$
$$b_2 a_6, c_{23} c_{16};$$
$$b_3 a_4, a_1 c_{14};$$
$$b_3 a_5, a_1 c_{15};$$
$$b_3 a_6, a_1 c_{16}$$

liefern die sechs conjugiert imaginären Geradenpaare:

$$c_{24}, c_{56};$$
$$c_{25}, c_{64};$$
$$c_{26}, c_{45};$$
$$c_{34}, b_4;$$
$$c_{35}, b_5;$$
$$c_{36}, b_6,$$

die in sechs reellen Ebenen liegen, von denen die drei ersten durch c_{13}, die drei andern durch a_3 gehen.

So haben wir in diesem Falle 3 reelle Gerade und 13 reelle Ebenen, von denen eine die 3 reellen Geraden enthält. Die andern gehen zu 4 und 4 durch eben diese 3 Geraden. Zwei imaginär conjugierte Gerade liegen stets in einer (reellen) Ebene.

β). Die sechs imaginären Geraden $a_4, a_5, \ldots, c_{16}$ seien auf folgende Art conjugiert:

$$a_4, c_{14};$$
$$a_5, c_{16};$$
$$a_6, c_{15},$$

woraus folgt, dass die Ebene $a_4 c_{14}$ reell ist, während $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$ zwei imaginär conjugierte Ebenen sind. Nun geben die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$b_2 a_4\,,\ c_{23} c_{14}\,;$$
$$b_3 a_4\,,\ a_1 c_{14}\,;$$
$$b_2 a_5\,,\ c_{23} c_{16}\,;$$
$$b_3 a_5\,,\ a_1 c_{16}\,;$$
$$b_2 a_6\,,\ c_{23} c_{15}\,;$$
$$b_3 a_6\,,\ a_1 c_{15}$$

die sechs imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$c_{24}\,,\ c_{56}\,;$$
$$c_{34}\,,\ b_4\,;$$
$$c_{25}\,,\ c_{45}\,;$$
$$c_{35}\,,\ b_6\,;$$
$$c_{26}\,,\ c_{64}\,;$$
$$c_{36}\,,\ b_5\,,$$

von denen nur die beiden ersten aus Geraden, die sich schneiden, gebildet sind, indem sie so die reellen Ebenen $c_{24} c_{56}$, $c_{34} b_4$ bilden, die bezüglich durch c_{13}, a_3 gehen.

Dieser Fall bietet also 3 reelle Gerade und 7 reelle Ebenen. Eine dieser Ebenen enthält die 3 reellen Geraden, die andern gehen zu 2 und 2 durch eben diese Geraden. Unter den imaginär conjugierten Geraden gibt es 6 conjugierte Geradenpaare, die sich schneiden, und 6 andere conjugierte Geradenpaare, die sich nicht schneiden.

270. Dritter Fall. Jedes der beiden Trieder besitzt eine reelle und zwei imaginär conjugierte Seitenflächen. Die reelle Ebene des ersten Trieders schneidet die Ebenen des zweiten Trieders in einer reellen Geraden:

$$b_1$$

und zwei imaginär conjugierten Geraden:

$$a_3\,,\ c_{13}\,.$$

Die reelle Ebene des zweiten Trieders trifft die imaginären Seitenflächen des ersten Trieders in zwei imaginär conjugierten Geraden:

$$a_2\,,\ c_{12}\,,$$

und die imaginären Ebenen beider Trieder treffen sich gegenseitig in zwei Paaren imaginär conjugierter Geraden:

$$b_2\,,\ b_3\,;$$
$$a_1\,,\ c_{23}\,.$$

Hierbei treffen sich die Geraden desselben Paares nicht.

Das durch die Geraden b_1, b_2, b_3 bestimmte reelle Hyperboloid schneidet die cubische Fläche in drei neuen Geraden a_4, a_5, a_6, für die man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden hat:

α) Wenn die Geraden

$$a_4 \, , \; a_5 \, , \; a_6$$

alle drei reell sind, so geben die reellen Ebenen

$$b_1 a_4 \, , \; b_1 a_5 \, , \; b_1 a_6$$

drei andere reelle Gerade:

$$c_{14} \, , \quad c_{15} \, , \quad c_{16} \, .$$

Die imaginär conjugierten Ebenen

$$b_2 a_4 \, , \; b_3 a_4 \, ;$$
$$b_2 a_5 \, , \; b_3 a_5 \, ;$$
$$b_2 a_6 \, , \; b_3 a_6$$

dagegen liefern die drei imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$c_{24} \, , \; c_{34} \, ;$$
$$c_{25} \, , \; c_{35} \, ;$$
$$c_{26} \, , \; c_{36} \, ,$$

und die imaginär conjugierten Ebenen

$$a_1 c_{14} \, , \; c_{23} c_{14} \, ;$$
$$a_1 c_{15} \, , \; c_{23} c_{15} \, ;$$
$$a_1 c_{16} \, , \; c_{23} c_{16}$$

ergeben drei andere Paare imaginär conjugierter Geraden:

$$b_4 \, , \; c_{56} \, ;$$
$$b_5 \, , \; c_{64} \, ;$$
$$b_6 \, , \; c_{45} \, .$$

Man erhält so 7 reelle Gerade und 5 reelle Ebenen. Diese fünf Ebenen gehen durch eine Gerade; es gibt 3, von denen jede 2 andere reelle Geraden enthält, während jede der 2 andern Ebenen 2 imaginär conjugierte Gerade enthält. Die imaginär conjugierten Geraden der 8 andern Paare schneiden sich nicht.

β) Wenn

$$a_4$$

eine reelle Gerade und

$$a_5 \, , \; a_6$$

zwei imaginär conjugierte Gerade sind, so gibt die reelle Ebene $b_1 a_4$ eine dritte reelle Gerade:

$$c_{14} \, ,$$

und die imaginär conjugierten Ebenen

$$b_1 a_5 , \; b_1 a_6 ;$$
$$b_2 a_5 , \; b_3 a_6 ;$$
$$b_2 a_6 , \; b_3 a_5 ;$$
$$b_2 a_4 , \; b_3 a_4$$

geben die vier Paar imaginär conjugierte Geraden:

$$c_{15} , \; c_{16} ;$$
$$c_{25} , \; c_{36} ;$$
$$c_{26} , \; c_{35} ;$$
$$c_{24} , \; c_{34} .$$

Die imaginär conjugierten Ebenen

$$a_1 c_{14} , \; c_{23} c_{14} ;$$
$$a_1 c_{16} , \; c_{23} c_{15} ;$$
$$a_1 c_{15} , \; c_{23} c_{16}$$

geben endlich die drei Paar imaginär conjugierter Geraden:

$$b_4 , \; c_{56} ;$$
$$b_6 , \; c_{46} ;$$
$$b_5 , \; c_{45} .$$

Man kommt somit auf einen schon betrachteten Fall zurück (Zweiter Fall, β).

271. Wir können also schliessen, *dass die allgemeine Fläche dritter Ordnung nur fünf verschiedene Arten zulässt unter Berücksichtigung der Realität der 27 Geraden*, nämlich:

1. Art:	27	reelle	Gerade	und	45	reelle Ebenen,
2. Art:	15	„	„	„	15	„ „ ,
3. Art:	7	„	„	„	5	„ „ ,
4. Art:	3	„	„	„	7	„ „ ,
5. Art:	3	„	„	„	13	„ „ .

Man kann für jede Art die Zahl der Doppelsechs verlangen, die durch zwei reelle oder imaginär conjugierte Sechstupel gebildet sind. Mit Hilfe der Tabelle, die wir oben (229) gegeben haben, findet man leicht Folgendes:

Erste Art. — Alles ist reell.

Zweite Art. — Es gibt 15 reelle Doppelsechs, von denen jedes Sechstupel reell ist und aus 4 reellen und 2 imaginär conjugierten Geraden gebildet wird. Es gibt ein anderes reelles Doppelsechs, dessen Sechstupel imaginär conjugiert sind.

Dritte Art. — Es gibt 6 reelle Doppelsechs, von denen jedes Sechstupel reell ist und aus 2 reellen Geraden und 2 imaginär conjugierten Ge-

radenpaaren besteht. Es existieren 2 andere reelle Doppelsechs, von denen jedes zwei imaginär conjugierte Sechstupel besitzt.

Vierte Art. — Es gibt nur ein reelles Doppelsechs, das aus zwei reellen Sechstupeln besteht. Jedes Sechstupel enthält 3 Paar imaginär conjugierter Geraden. Ausserdem gibt es 3 reelle Doppelsechs, die aus imaginär conjugierten Sechstupeln zusammengesetzt sind.

Fünfte Art. — Es gibt kein reelles Sechstupel, sondern nur 12 reelle Doppelsechs, die sämmtlich aus je zwei imaginär conjugierten Sechstupeln zusammengesetzt sind.

272. Wir haben oben (234) gesehen, dass eine cubische Fläche im Allgemeinen mit Hilfe dreier projectivischer Ebenennetze erzeugt werden kann. Bei dieser Erzeugungsweise leitet man die 27 Geraden aus den sechs Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ ab, in denen eine Ebene E durch eine gewisse Raumcurve sechster Ordnung getroffen wird. In der That entsprechen die 27 Geraden (226) den sechs Puncten:

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6,$$

den sechs Kegelschnitten:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

und den fünfzehn Geraden:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \; \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \qquad \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_4, \; \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_5, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \; \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_5, \; \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_6, \; \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \; \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5, \; \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_6 \, .$$

Da der Complex der drei Netze als reell vorausgesetzt ist, ebenso wie die Ebene E, so ist das System der sechs Puncte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ ebenfalls reell, und man kann daher folgende Fälle unterscheiden:

1. Wenn die Puncte sämmtlich reell sind, so sind sämmtliche 27 Gerade reell (*Erste Art*).

2. Sind vier Puncte reell und die beiden andern imaginär conjugiert, so erhält man $4+4+6+1=15$ reelle Gerade, die andern sind imaginär und zwar treffen sich je zwei conjugierte Gerade nicht (*Zweite Art*).

3. Sind zwei Puncte reell und die beiden andern paarweise imaginär conjugiert, so erhält man $2+2+1+2=7$ reelle Gerade, 2 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und 8 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht treffen (*Dritte Art*).

4. Sind die sechs Puncte sämmtlich imaginär und paarweise conjugiert, so hat man $1+1+1=3$ reelle Gerade; 6 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und 6 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht treffen (*Vierte Art*).

Es ist nicht möglich die fünfte Art mittelst dieser Erzeugungsweise zu erhalten. Dies entspringt auch aus der Bemerkung, dass bei der fünften Art

kein reelles Sechstupel existiert; während die Erzeugung mittelst dreier projectivischer Netze (deren Complex reell ist), uns auf ein Doppelsechs führt, dessen Sechstupel (durch die Geraden gebildet, welche den sechs Puncten und den sechs Kegelschnitten entsprechen) nothwendigerweise reell sind [1].

Wir wollen jetzt zu beweisen versuchen, dass, obgleich die Erzeugung durch projectivische Netze nur die vier ersten Arten ergibt, es eine andere Erzeugungsweise gibt, die geeignet ist, alle fünf Arten zu liefern. Hierzu müssen wir aber vorher die möglichen Fälle discutieren, die bei dem Durchschnitt zweier Quadriflächen eintreten können, die sich in keinem Puncte berühren.

273. Zwei Flächen zweiter Ordnung, die keinen Berührungspunct haben, schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung, durch welche vier Quadrikegel gehen. Die Scheitel dieser Kegel sind zugleich die Scheitel des allen durch die Raumcurve gehenden Quadriflächen gemeinsamen conjugierten Tetraeders. Diese Flächen bilden ein Büschel, das heisst, durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{x}$ des Raumes und durch die Raumcurve geht eine einzige Quadrifläche. Die beiden geradlinigen Generatrixen dieser Fläche, die durch $\mathfrak{x}$ gehen, sind die beiden Geraden, welche man vom Puncte $\mathfrak{x}$ aus so ziehen kann, dass sie die Curve zweimal schneiden.

Jeder Kegel der durch die Raumcurve geht und seinen Scheitel in einem Puncte der Curve hat, ist dritter Ordnung und folglich ist die Centralprojection der Raumcurve auf einer Ebene, wenn das Auge auf der Curve angenommen ist, eine allgemeine Curve dritter Ordnung.

Aus den Eigenschaften dieser ebenen Perspectivcurve kann man eine grosse Zahl von Eigenschaften der Raumcurve vierter Ordnung (und vom Geschlecht 1 (237)) herleiten. Z. B.: Durch einen beliebigen Punct der cubischen Plancurve kann man an dieselbe vier Tangenten ziehen, deren Doppelverhältniss constant ist (Doppelverhältniss der cubischen Plancurve). Man kann folglich durch jede Gerade, welche auf der Raumcurve in zwei Puncten $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ aufsteht, an dieselbe vier Tangentialebenen legen. Ist $\mathfrak{o}$ das Auge und man lässt $\mathfrak{o}'$ sich bewegen, so bleibt das Doppelverhältniss dieser vier Ebenen unveränderlich, und wird also auch nicht variieren, wenn $\mathfrak{o}'$ fest ist und $\mathfrak{o}$ veränderlich. Das Verhältniss bleibt also auch dann dasselbe, wenn man

---

1) Betrachtet man eine cubische Fläche F_3 als gemischte Polarfläche zweier Ebenen E, E' in Bezug auf eine Fundamentalfläche derselben Ordnung (187), so kommt man auf ein Doppelsechs, dessen Geraden den Durchschnitten der gegebenen Ebenen mit zwei Raumcurven sechster Ordnung bezüglich entsprechen. Sind die gegebenen Ebenen imaginär conjugiert, so ist es ebenso mit den beiden Sechstupeln und folglich könnte es möglich scheinen, dass man auf diese Weise auch die fünfte Art erhalten könnte. Diese Illusion verschwindet aber sogleich, wenn man beachtet, dass die homologen Geraden zweier Doppelsechs, die imaginär conjugiert sind, sich nicht schneiden, während bei der fünften Art zwei imaginär conjugierte Gerade stets in derselben Ebene liegen.

die Sehne $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ auf irgend welche Weise verrückt. Daraus folgt, dass, wenn das Auge die Raumcurve durchläuft, das Doppelverhältniss der cubischen Perspectivcurve constant bleibt. Man kann dieser constanten Zahl den Namen *Doppelverhältniss der Raumcurve* geben.

274. Man kann eine Raumcurve $\mathfrak{c}_4$ vierter Ordnung (Geschlecht 1) als unvollständigen Durchschnitt einer Fläche S zweiter Ordnung und eines Kegels K dritter Ordnung ansehen, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$ ein Punct von $\mathfrak{c}_4$ ist. Die beiden Generatrixen von S, die durch $\mathfrak{o}$ gehen, schneiden die Raumcurve nochmals und gehören also auch dem Kegel K an; das heisst, sie bilden mit $\mathfrak{c}_4$ den vollständigen Durchschnitt der Orte S und K. Die Ebene dieser Generatrixen berührt S in $\mathfrak{o}$ und enthält also die Tangente t von $\mathfrak{c}_4$ in diesem Puncte, eine Gerade, die ebenfalls eine Generatrix des Kegels K ist. Die Osculationsebene von $\mathfrak{c}_4$ in $\mathfrak{o}$ schneidet die Curve in einem andern Puncte $\mathfrak{o}'$, also berührt diese Ebene den Kegel K längs t und schneidet ihn in der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$.

Liegt das Auge in $\mathfrak{o}$, so ist die Centralprojection von $\mathfrak{c}_4$ eine cubische Curve (Basis des Kegels K). Es sei $\mathfrak{w}$ die Spur von t auf der Zeichnungsebene, dann sind die Tangenten der cubischen Plancurve, die von $\mathfrak{w}$ ausgehen, die Spuren der vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$, die man durch t legen kann. Nun berühren diese Ebenen die Raumcurve in zwei Puncten, von denen einer $\mathfrak{o}$ ist, sie gehen also bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel, auf denen $\mathfrak{c}_4$ liegt, da diese Kegel die vollständige Enveloppe der Bitangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$ bilden. Folglich haben wir den Satz: *Das Doppelverhältniss von vier Ebenen, welche $\mathfrak{c}_4$ in einem beliebigen Puncte berühren und bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel gehen, ist gleich dem Doppelverhältniss der Raumcurve* und ist also eine constante Zahl.

275. Umgekehrt kann eine gegeb enecubische Plancurve als Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung (Geschlecht 1) angesehen werden, die durch den Augenpunct $\mathfrak{o}$ geht. Sei $\mathfrak{w}$ ein beliebiger Punct der cubischen Plancurve, und es schneide eine durch $\mathfrak{w}$ gezogene Gerade die Curve in zwei andern Puncten $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$, dann trifft der Kegel, dessen Scheitel der Punct $\mathfrak{o}$ ist, und dessen Basis die cubische Plancurve darstellt, eine beliebig durch die Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{w}_1, \mathfrak{o}\mathfrak{w}_2$ gelegte Quadrifläche in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche in $\mathfrak{o}$ von der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{w}$ berührt wird.

276. Sind die beiden Quadriflächen (273) reell, so kann ihr Durchschnitt reell oder imaginär sein. Unter der ersten Voraussetzung, besteht er entweder in *einem einzigen Zug* (aus *einem Stück*), oder er kann auch der Complex zweier zusammengehöriger *Züge* (*Stücke*) sein, welche keinen Punct gemein haben, selbst nicht in unendlicher Entfern.ıng. Wir müssen diese drei Fälle separat untersuchen.

277. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{c}_4$ zweier Quadriflächen eine *monogrammische* Curve (das heisst mit einem Zug), so besteht ihre Perspectivcurve (das Auge liegt immer in einem Puncte der Raumcurve) auch aus einem Zuge, das heisst, sie bildet eine Schlangenlinie mit drei Wendepuncten [1]). Man weiss nun aber [2]), dass eine solche cubische Plancurve ein imaginäres Doppelverhältniss hat, das heisst mit andern Worten, durch einen beliebigen Punct der cubischen Curve kann man an dieselbe nur zwei reelle Tangenten ziehen. Also (274) gibt es unter den vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$ in einem beliebigen ihrer Puncte, die bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel gehen (welche den Büschel angehören, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist), nur zwei relle, das heisst, *von den vier Kegeln sind nur zwei reell.*

Aus der Eigenschaft der cubischen Perspectivcurve nur zwei reelle Tangenten von einem beliebigen ihrer Puncte zuzulassen, folgt ausserdem, *dass man durch jede auf* $\mathfrak{c}_4$ *in zwei* reellen, verschiedenen oder zusammenfallenden *Puncten aufstehende Gerade an diese Curve zwei und zwar nur zwei reelle Tangentialebenen legen kann.* Nach dem Gesetze der Continuität besteht diese Eigenschaft auch noch für eine Gerade, die auf $\mathfrak{c}_4$ in zwei imaginär conjugierten Puncten aufsteht.

Das conjugierte Tetraeder hat zwei reelle Scheitel und folglich zwei reelle Seitenebenen. Jede reelle Ebene enthält einen reellen Scheitel. Also schneidet jede reelle Seitenfläche $\mathfrak{c}_4$ in zwei reellen Puncten, das heisst, sie schneidet den Quadrikegel, dessen Scheitel auf dieser Seitenfläche liegt in zwei Geraden, von denen eine den Schnitt des andern Kegels in zwei reellen Puncten trifft.

Die reellen Kegel zweiter Ordnung, die durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, bilden die Grenze zwischen den windschiefen Flächen und den nicht geradlinigen Flächen des Büschels, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist. Im vorliegenden Falle ist es leicht zu sehen, *dass jede Quadrifläche des Büschels, welche durch einen Punct des Raumes ausserhalb oder innerhalb beider reeller Kegel geht, windschief ist, während die Quadrifläche, die durch einen beliebigen Punct des Raumes innerhalb des einen Kegels und ausserhalb des andern geht, keine Regelfläche ist.*

278. Der Durchschnitt $\mathfrak{c}_4$ sei jetzt eine *digrammische* Curve (das heisst, aus zwei Stücken). In diesem Falle ist die cubische Perspectivcurve aus einem Oval [3]) und einer Schlangenlinie mit drei Wendepuncten zusammengesetzt. Es sei $\mathfrak{w}$ auf der Zeichenebene die Spur der Geraden, welche $\mathfrak{c}_4$ im Augenpuncte $\mathfrak{o}$ berührt (275), dann sind die von $\mathfrak{w}$ an die cubische Curve gezogenen Tangenten die Spuren der vier Ebenen, welche $\mathfrak{c}_4$ in $\mathfrak{o}$ berühren

---

[1]) Wir betrachten die Stetigkeit der Curve durch den Durchgang durch das Unendliche nicht unterbrochen. Eine typische Form dieser Gattung von cubischen Plancurven ist Newton's *parabola pura (Enumeratio linearum tertii ordinis).*

[2]) Giornale di Matematiche, T. 2.° (Napoli 1864) p. 78.

[3]) Wir wenden diese Benennung nach Bellavitis auch auf hyperbolische und parabolische Formen an. Eine typische Form dieser Gattung ist Newton's *parabola campaniformis cum ovali.*

und bezüglich durch die Scheitel des conjugierten Tetraeders gehen (274). Nun sind die vier Tangenten der cubischen Curve, die von $\mathfrak{w}$ ausgehen, alle imaginär oder alle reell, je nachdem dieser Punct dem Oval oder der Schlangenlinie angehört; also *sind die Scheitel des conjugierten Tetraeders* (das heisst, die Scheitel der vier Quadrikegel die durch $\mathfrak{c}_4$ gehen) *sämmtlich imaginär oder sämmtlich reell, jenachdem das Perspectivbild des Zuges auf welchem das Auge gedacht wird, ein Oval oder eine Schlangenlinie ist.*

Es folgt daraus, dass, wenn die Curve $\mathfrak{c}_4$ gegeben ist, das Perspectivbild des Zuges, auf dem das Auge sich befindet, was auch der gewählte Zug ist, immer ein Oval oder immer eine Schlangenlinie ist. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden jenachdem das conjugierte Tetraeder vollständig reell oder vollständig imaginär ist.

279. Ist das Tetraeder ganz imaginär, ist also $\mathfrak{w}$ ein Punct des Ovals, so schneidet eine beliebige, durch den Punct des Auges gelegte Ebene die Curve $\mathfrak{c}_4$ in drei weitern Puncten (von denen zwei imaginär werden können), und ihre Perspectivbilder gehören entweder sämmtlich der Schlangenlinie an, oder einer gehört diesem Zweige an, und die beiden andern dem Oval. *Trifft also eine Ebene die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *in vier reellen Puncten, so gehören drei dieser Puncte ein und demselben Zuge an und der vierte dem andern Zuge; trifft aber eine Ebene die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *nur in zwei reellen Puncten, so liegt davon stets auf jedem Stücke ein Punct.* Daraus folgt, dass eine Tangentialebene in einem Puncte die Curve in zwei weitern Puncten schneidet, die auf verschiedenen Stücken liegen; dass eine Osculationsebene des einen Stückes das andere Stück schneidet, und dass keine reelle Ebene existiert, welche die Curve in zwei Puncten berührt oder dieselbe in vier sämmtlich imaginären oder sämmtlich zusammenfallenden Puncten trifft.

Weiter folgt aus dem eben für die cubische Perspectivcurve Bemerkten, *dass durch keine Gerade, welche auf der Curve in zwei* (reellen oder imaginär conjugierten) *Puncten desselben Stückes aufsteht, eine reelle Tangentialebene geht, welche noch anderswo die Curve berührt, und dass durch jede Gerade, die auf beiden Stücken aufsteht, sich immer vier reelle Tangentialebenen legen lassen.*

Ist ein Tetraeder einer Quadrifläche conjugiert, so trifft jede Generatrix der Fläche, wenn sie eine Kante schneidet, auch die Gegenkante, und folglich enthält die Fläche die vier Geraden, in denen sich die vier Tangentialebenen schneiden, welche man durch zwei Gegenkanten legen kann. Wenn das Tetraeder (wie wir jetzt voraussetzen wollen) aus zwei Paar imaginär conjugierten Ebenen besteht, so gibt es nichtsdestoweniger zwei reelle Gegenkanten, von denen jede der Durchschnitt zweier Tangentialebenen der Fläche ist. Diese Ebenen sind aber reell, denn sie müssen mit zwei Seitenebenen des Tetraeders, die imaginär conjugierte Ebenen sind, ein harmonisches System bilden. Folglich sind die vier Durchschnittsgeraden der beiden Paare von Tangentialebenen reell, und also die Fläche windschief.

Somit sind im gegenwärtigen Falle alle durch $\mathfrak{c}_4$ *gehenden Quadriflächen windschief*, das heisst, durch jeden Punct des Raumes kann man zwei reelle Gerade legen, welche die Curve zweimal schneiden, und zwar mindestens die eine in zwei reellen Puncten.

280. Wir setzen jetzt voraus, unsere digrammische Raumcurve $\mathfrak{c}_4$ entspreche einem völlig reellen conjugierten Tetraeder, das heisst, sie möge auf vier reellen Quadrikegeln liegen. Eine durch das Auge willkürlich gelegte Ebene schneidet dann $\mathfrak{c}_4$ in drei andern Puncten (zwei können imaginär werden) und ihre Perspectivbilder fallen entweder alle drei auf die Schlangenlinie oder eines auf diesen Zweig, und die beiden andern auf das Oval. *Wenn also eine Ebene die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *in vier reellen Puncten schneidet, so können dieselben sämmtlich ein und demselben Zweige angehören, oder zwei dem einen und zwei dem andern, und wenn eine Ebene die Curve nur in zwei reellen Puncten trifft, so gehören dieselben stets zu einem Zug.* Daraus folgt, dass eine Osculationsebene eines Zuges denselben Zug nochmals trifft.

Aus der Betrachtung der vier Tangenten der cubischen Perspectivcurve, die von einem ihrer Puncte ausgehen, zieht man weiter das Resultat, *dass man durch jede Gerade, welche auf der Curve in zwei* (reellen oder imaginär conjugierten) *Puncten desselben Zuges aufsteht, vier Tangentialebenen legen kann, von denen zwei den einen Zug und zwei den andern berühren, während durch eine Gerade, die auf beiden Zügen aufsteht, keine reelle Tangentialebene hindurchgeht.*

Jede Ebene des conjugierten Tetraeders schneidet die Curve $\mathfrak{c}_4$ in vier Puncten, Scheitel eines vollständigen Vierecks, dessen Gegenseiten sich in drei reellen Puncten (Scheitel des Tetraeders) treffen. Diese vier Durchschnittspuncte sind daher alle reell oder alle imaginär. Wenn aber andererseits ein Trieder einem Quadrikegel conjugiert ist, so gibt es eine Fläche des Trieders, welche den Kegel nicht trifft; also *schneiden zwei Seitenebenen des Tetraeders die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *in vier reellen Puncten und die beiden andern in vier imaginären Puncten.*

Es ist leicht zu sehen, dass *jede Quadrifläche* des Büschels, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist, *die durch einen beliebigen Punct des Raumes gelegt ist, der innerhalb oder ausserhalb sämmtlicher vier Kegel sich befindet, oder auch des Raumes, der innerhalb zweier Kegel liegt, aber ausserhalb der beiden andern, eine Regelfläche ist; während jede Quadrifläche, welche durch einen Punct gelegt ist, der* $\left\{\begin{matrix}\textit{innerhalb}\\ \textit{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ *des einen Kegels und* $\left\{\begin{matrix}\textit{ausserhalb}\\ \textit{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ *der drei andern liegt, eine nicht windschiefe Fläche darstellt.* Weiter kann man durch einen beliebigen Punct des Raumes, der innerhalb oder ausserhalb sämmtlicher vier Kegel liegt, zwei Gerade ziehen, die jede in zwei reellen oder imaginär conjugierten Puncten desselben Zuges der Curve $\mathfrak{c}_4$ aufsteht, während durch jeden Punct des Raumes, der innerhalb zweier Kegel liegt und ausserhalb der beiden andern, zwei Gerade gehen, die jede den einen und den andern Zug schneidet.

ZUSATZ ZU NO. 214.

Von den beiden cubischen Curven, welche der Hessiana und zwei conjugierten Ebenen der Involution gemeinschaftlich sind, enthält die eine die Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}'$ und die andere die Puncte $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}$ (208); folglich sind die beiden cubischen Curven entsprechende Curven (168). Dem ebenen Schnitte, der aus der ersten cubischen Curve und der Geraden p besteht, entspricht (199) das durch die andere cubische Curve und die drei Geraden p_1, p_2, p_3 die im Puncte $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen, gebildete System. Folglich:

Die cubischen Curven, die man aus der Hessiana mittelst Ebenen schneidet, welche durch die Gerade p gehen, sind zu zwei und zwei correspondierende Curven. Zwei entsprechende cubische Curven werden vom Puncte $\mathfrak{p}$ aus mittelst desselben Kegels gesehen, der folglich die gemischte cubische Polarfläche der Ebenen beider Curven ist.

Ist die schneidende Ebene eine der Doppelebenen der Involution, so entspricht die cubische Curve, welche dann als Durchschnitt mit der Hessiana resultiert, sich selbst; das heisst, ihre Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ sind zu zwei und zwei entsprechend. Offenbar ist diese Curve die Hessiana der cubischen Curve, längs deren die nämliche Ebene die Fundamentalfläche schneidet. Die Polarebene von $\mathfrak{c}$ berührt die Hessiana in $\mathfrak{c}'$ (183) und geht folglich durch $\mathfrak{p}$; also liegen (6) alle Puncte $\mathfrak{c}$ auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$. Daraus schliesst man, dass die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ aus den Doppelebenen der Involution zusammengesetzt ist, von denen in No. 214 gesprochen wurde.

Wir fügen noch hinzu, dass sämmtliche gemeine und gemischte cubische Polarflächen der durch p gehenden Ebenen in $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunct und ausserdem drei andere Doppelpuncte besitzen, die in ein und derselben Ebene durch p und bezüglich auf den Geraden p_1, p_2, p_3 liegen. Eine solche Fläche geht in einen Kegel über, wenn sie sich auf zwei conjugierte Ebenen der obengenannten Involution bezieht.



Druck von J. Drägers Buchdruckerei (C. Feicht) in Berlin.